(14) ZUPEŁNOŚĆ, SUPREMUM I INFIMUM

<u>Twierdzenie</u>: $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

$$\exists \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}.$$

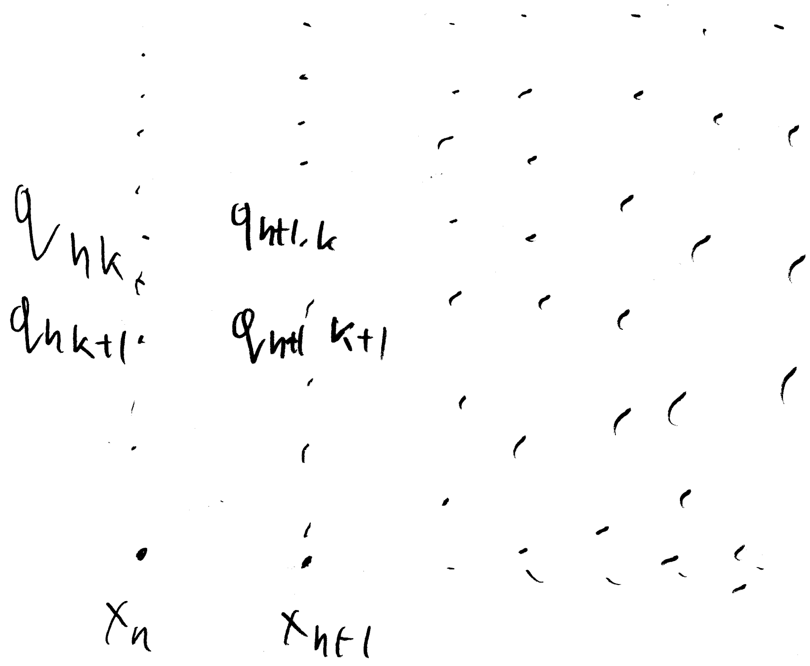
<u>Szkic dowodu</u>: $x_n = [q_n]$, gdzie $q_n \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$

Oznaczmy $q_n(k) = q_{nk}$. Idea: Ciąg przekątniowy

$\mathbb{N} \ni k \mapsto Q_k := q_{kk} \in \mathbb{Q}$

jest Cauchy

i $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = [Q]$.



$\square$

<u>Uzupełnieniem przestrzeni metrycznej</u> (X, d) nazywamy przestrzeń metryczną $(\bar{X}, \bar{d})$, gdzie

$\bar{X} := \mathrm{Cauchy}_d(\mathbb{N}, X)/\sim$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall N < k : d(x_k, y_k) < \frac{1}{n}$,

$$\bar{d}\left([\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}], [\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}]\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, y_n).$$

Ta granica istnieje, bo $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy liczb rzeczywistych, i jest jedyna, bo $\mathbb{R}$ jest przestrzenią Hausdorffa. Można też wykazać że ta granica nie zależy od wyboru reprezentantów z klas $[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$ i $[\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$.

Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy zupełną jeśli

$$\boxed{\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Cauchy}_d(\mathbb{N}, X) \quad \exists \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X.}$$

Twierdzenie Hausdorffa: Uzupełnienie przestrzeni metrycznej jest przestrzenią zupełną.

Dowód: Tak jak dla $(\mathbb{R}, |\ |)$.

Wniosek: Ciała $\mathbb{Q}_p$ są metrycznie zupełne.

RC

Niech $(D, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, a $\emptyset \neq A \subseteq D$ dowolnym jego niepustym podzbiorem.

Supremum A nazywamy $\alpha \in D$ takie że

i) $\forall a \in A : a \leq \alpha$

ii) $(\forall a \in A : a \leq \beta) \Rightarrow \alpha \leq \beta$

Infimum A nazywamy $\alpha \in D$ takie że

i) $\forall a \in A : \alpha \leq a$

ii) $(\forall a \in A \ \beta \leq a) \Rightarrow \beta \leq \alpha$

Supremum lub infimum, jeśli istnieje to jest jedyne bo $(\alpha \leq \alpha'$ i $\alpha' \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \alpha')$

Oznaczamy je odpowiednio $\sup A$ i $\inf A$.

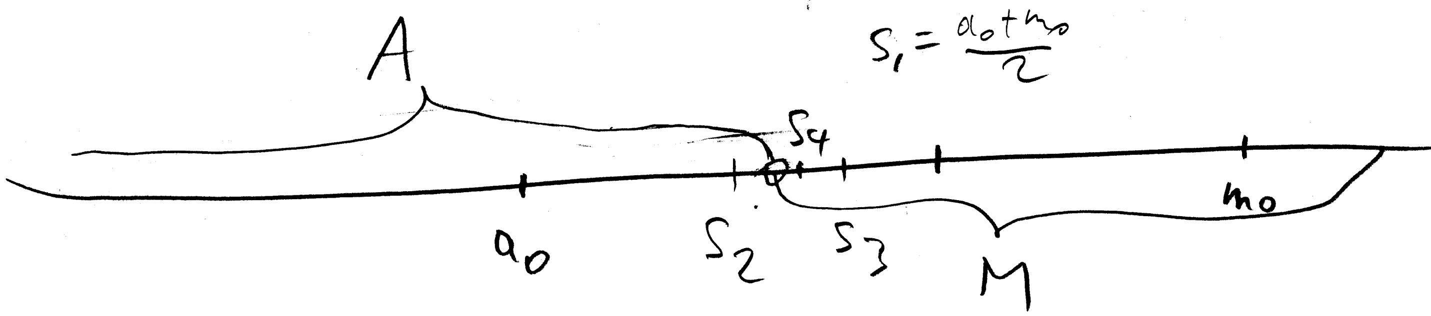
Twierdzenie: Każdy $A \subseteq \mathbb{R}$ ograniczony od dołu ma infimum, a ograniczony od góry ma supremum.

Dowód: Niech $M := \{m \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq m\}$. Z założenia $A \neq \emptyset \neq M$. Wybierzemy $a_0 \in A$ i $m_0 \in M$. Zdefiniujemy ciąg

$$s_0 = a_0, \quad \boxed{s_n := a_0 + (m_0 - a_0) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{f(k)}}{2^k}}, \text{ gdzie}$$

$$f(1) = 0 \quad \text{i} \quad f(k) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } s_{k-1} \notin M \\ 1 & \text{gdy } s_{k-1} \in M \end{cases}.$$

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ewidentnie ciągiem Cauchy, więc $\exists \lim_{n \in \mathbb{N}} s_n =: s$. Udowodnimy że $s = \sup A$.



Przypuśćmy że $\exists a \in A : s < a$. Wtedy $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq n : s_n < a$. Stąd tylko dla skończonej ilości k mamy

$f(k)=1$. Oznaczmy $K := \max\{k\in\mathbb{N} \mid f(k)=1\}$

Wtedy $s_K \leq s < a \leq s_{K-1} \in M$. Z drugiej strony $s = a_0 + (m_0-a_0)\left(\sum_{n=1}^{K}\frac{(-1)^{f(n)}}{2^n} + \sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right) =$

$$= a_0 + (m_0-a_0)\left(\sum_{n=1}^{K-1}\frac{(-1)^{f(n)}}{2^n} - \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= a_0 + (m_0-a_0)\sum_{n=1}^{K-1}\frac{(-1)^{f(n)}}{2^n} = s_{K-1}.$$ Jest to w sprzeczności z $s < s_{K-1}$. Zatem $\forall a\in A: a\leq s$. Analogicznie wykazujemy że $\forall m\in M: s\leq m$. Wreszcie $\inf A = -\sup(-A)$, gdzie $-A := \{-a\in\mathbb{R} \mid a\in A\}$. $\square$

<u>Przykłady</u>:

① Dla $(2^X, \subseteq)$ mamy $\sup\{A_i\}_{i\in I} = \bigcup_{i\in I} A_i$, $\inf\{A_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} A_i$.

(2) Dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego $(D, \leq)$ mamy

$$A \cap M \neq \phi \Rightarrow \exists \sup A \text{ i } A \cap M = \{\sup A\},$$

gdzie $A \subseteq D$ i $M := \{m \in D \mid \forall a \in A : a \leq m\}$.

(3) Dla dowolnej kraty $(\Lambda, \vee, \wedge)$ i dowolnego skończonego podzbioru $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ mamy $\sup\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \lambda_1 \vee \dots \vee \lambda_n$.

<u>Zadanie 15</u>: Niech $(\Lambda, \vee, \wedge)$ będzie dowolną kratą z porządkiem $x \leq y \Leftrightarrow \exists z \in \Lambda : y = x \vee z$. Udowodnij że $\inf\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n$.

<u>Zastosowania</u>: (1) $\limsup\limits_{\alpha \in D} x_\alpha := \lim\limits_{\alpha \in D} \left(\sup\{x_\beta\}_{\alpha \leq \beta}\right)$, $\liminf\limits_{\alpha \in D} x_\alpha := \lim\limits_{\alpha \in D} \left(\inf\{x_\beta\}_{\alpha \leq \beta}\right)$. Ważne jest tu że $B \subseteq A \Rightarrow (\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A)$.

(2) Odległość punktu od zbioru $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$. Stąd normalność przestrzeni metrycznych, odległość Gromova-Hausdorffa. (3) Odległość na zbiorze $C(X)$ funkcji ciągłych na zwartym X: $\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \in \mathbb{R} \mid x \in X\}$.