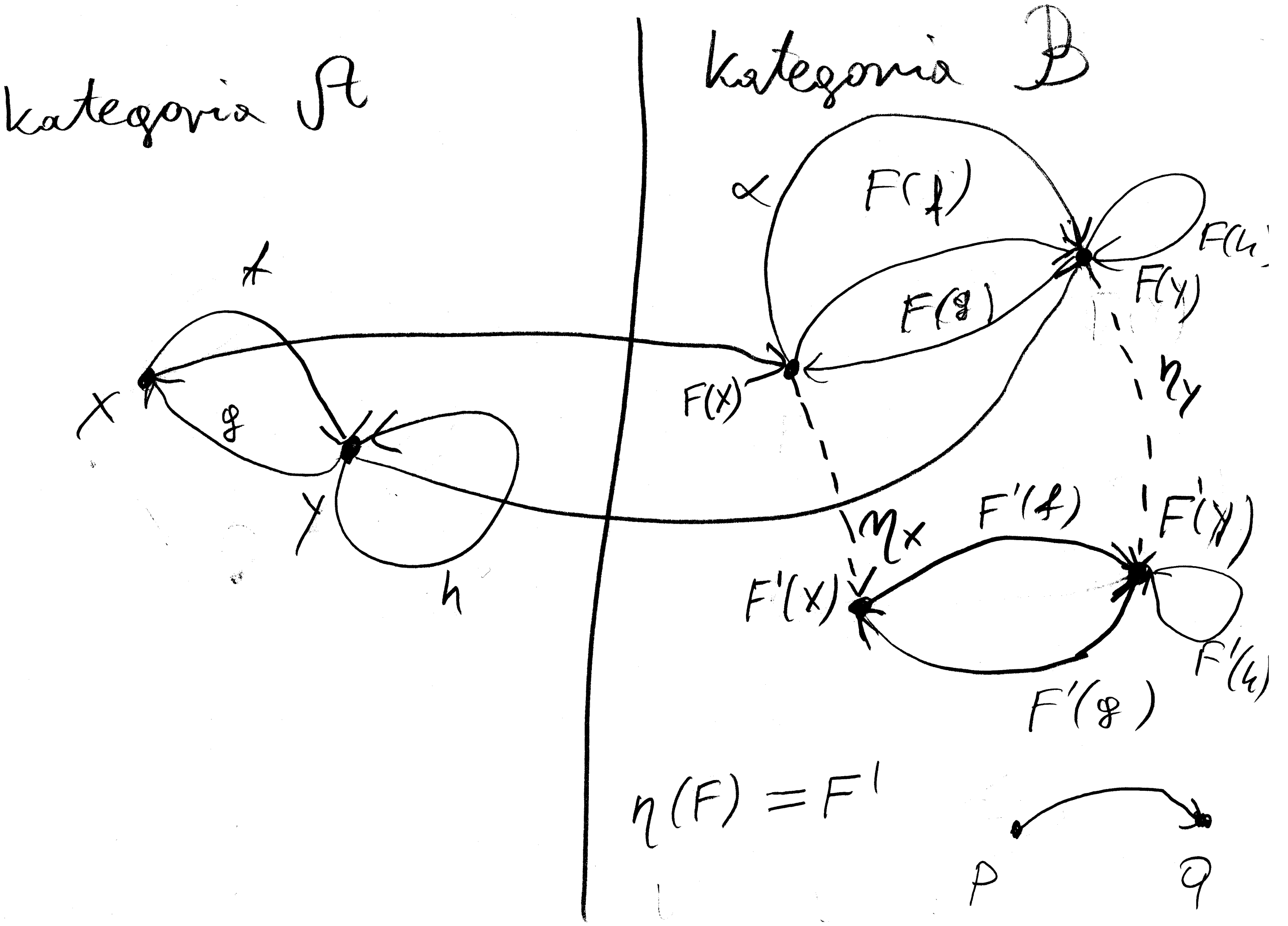
(15) GRANICE I KOGRANICE W TEORII KATEGORII



Kropki tworzą klasę obiektów, strzałki wewnętrzne morfizmy, strzałki przez kreskę funktory, przerywane strzałki transformację naturalną między funktorami.

<u>Kategoria $\mathcal{A}$</u> to para $(Ob\mathcal{A}, Mor\mathcal{A})$,

gdzie $Ob\mathcal{A}$ jest <u>klasą</u> obiektów

(nie ma aksjomatu że istnieje klasa wszystkich podklas danej klasy), a

$Mor\mathcal{A}$ jest klasą zbiorów morfizmów

z obiektu A do obiektu B. Taki

zbiór oznaczamy przez $Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$.

Zakładamy przy tym aksjomaty:

i) $\forall A, B, C \in Ob\mathcal{A},\ f \in Mor_{\mathcal{A}}(A, B),\ g \in Mor_{\mathcal{A}}(B, C)$

$\exists!\ g \circ f \in Mor_{\mathcal{A}}(A, C)$

ii) $\forall A, B, C, D \in Ob\mathcal{A},\ f \in Mor_{\mathcal{A}}(A, B),\ g \in Mor_{\mathcal{A}}(B, C),\ h \in Mor_{\mathcal{A}}(C, D)$

$$\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$$

iii) $\forall A \in Ob\mathcal{A}\ \exists\, id_A \in Mor_{\mathcal{A}}(A, A)$:

$id_A \circ f = f$, $\forall f \in Mor_{\mathcal{A}}(X, A)$, $g \circ id_A = g$, $\forall g \in Mor_{\mathcal{A}}(A, Y)$.

<u>Uwaga</u>: id_A jest jedyny bo $id_A = id_A \circ id_A' = id_A'$.

Przykłady: ① Kategoria zbiorów $\mathcal{S}$.

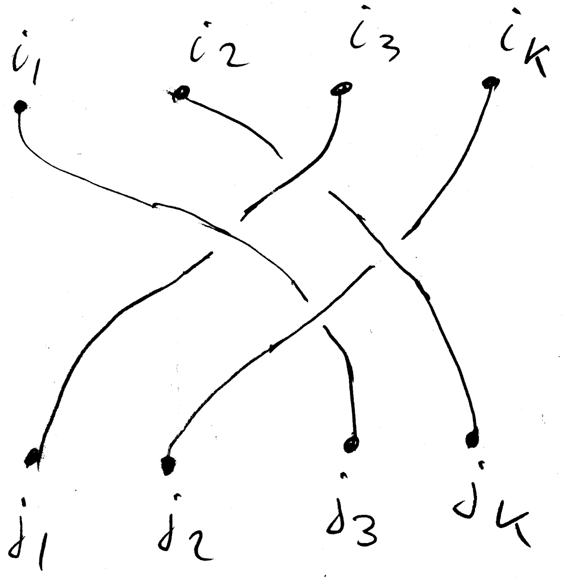
$Ob\,\mathcal{S}$ = klasa wszystkich zbiorów,

$Mor_{\mathcal{S}}(X,Y) = Map(X,Y)$ (zbiór wszystkich odwzorowań).

② Kategoria warkoczy $\mathcal{B}$. $Ob\,\mathcal{B}$ = zbiór wszystkich skończonych (niepustych) podzbiorów $\mathbb{N}$,

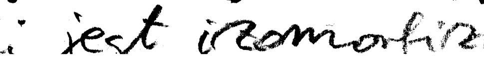
$Mor_{\mathcal{B}}(\{i_1,\dots,i_k\},\{j_1,\dots,j_k\})$ = zbiór wszystkich warkoczy o k włosach:

$k=4$



Morfizm $X \xrightarrow{f} Y$ nazywamy izomorfizmem jeśli $\exists\, Y \xrightarrow{\tilde f} X : f\circ\tilde f = id_Y$ i $\tilde f\circ f = id_X$. Morfizm $\tilde f$ jest jedyny bo $\tilde f'\circ f\circ\tilde f = \tilde f'\circ id_Y \Rightarrow id_X\circ\tilde f = \tilde f'\circ id_Y \Rightarrow \tilde f = \tilde f'$.

$Mor_{\mathcal{B}}(\{i_1,\dots,i_k\},\{j_1,\dots,j_l\}) = \emptyset$ dla $k\neq l$

Warkocze składa się przez wiązanie włosów: . Każdy morfizm w tej kategorii jest izomorfizmem.

Funktor kowariantny (kontrawariantny)

z kategorii $\mathcal{A}$ do kategorii $\mathcal{B}$ to przyporządkowanie $Ob\,\mathcal{A} \xrightarrow{F} Ob\,\mathcal{B}$,

$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \xrightarrow{F} Mor_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$ (kowariantny),

$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{B}}(F(B), F(A))$ (kontrawariantny),

takie że
$$\boxed{\begin{array}{ll} F(g\circ f) = F(g)\circ F(f) & (\text{ko}), \\ F(g\circ f) = F(f)\circ F(g) & (\text{kontra}) \end{array}}$$

$\forall A, B, C \in Ob\,\mathcal{A}$, $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$.

Przykłady: Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią zbiorów i $X_0 \in Ob\,\mathcal{S}$. Wtedy przyporządkowanie

$$Ob(\mathcal{S}) \ni X \longmapsto Map(X_0, X) \in Ob(\mathcal{S}),$$

$\forall X, Y \in Ob\,\mathcal{S}$: $Map(X,Y) \ni f \longmapsto f_* \in Map(Map(X_0,X), Map(X_0,Y))$

$f_*(\varphi) := f\circ\varphi$ definiuje funktor kowariantny z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}$. Podobnie, przyporządkowanie $X \longmapsto Map(X, X_0)$, $f \longmapsto f^*$, $f^*(\varphi) = \varphi\circ f$, definiuje funktor kontrawariantny.

Naturalna transformacja η funktora $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ do funktora $\mathcal{A} \xrightarrow{F'} \mathcal{B}$ to klasa morfizmów w $\mathcal{B}$ indeksowanych przez obiekty $\mathcal{A}$ $(\forall X \in Ob(\mathcal{A}) \; \exists! \, \eta_X \in Mor(F(X), F'(X)))$ taka że wszystkie diagramy

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
F'(X) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(Y)
\end{tikzcd}$$

są przemienne.

Systemem skierowanym w kategorii $\mathcal{A}$ nazywamy $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha,\beta \in D \\ \alpha \le \beta}}$, gdzie

D jest zbiorem skierowanym, $\forall \alpha \in D : A_\alpha \in Ob(\mathcal{A})$, $\forall \alpha, \beta \in D, \alpha \le \alpha : f_{\alpha\beta} \in Mor(A_\alpha, A_\beta)$, oraz

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in D :$ $\boxed{f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}}$.
$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"'] \arrow[rr, bend left, "f_{\alpha\gamma}"] & A_\beta \arrow[r, "f_{\beta\gamma}"'] & A_\gamma
\end{tikzcd}$$

Zadanie 16 Udowodnij że $(X, \le) \mapsto (X, \mathcal{U}(X, \le))$ i $(X, \mathcal{O}(X)) \mapsto (X, \preceq)$, $x \preceq y \iff \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$, definiują funktory pomiędzy kategoriami zbiorów quasi uporządkowanych i przestrzeni topologicznych. Morfizmy to odpowiednio odwzorowania monotoniczne lub ciągłe.

Granicą systemu skierowanego $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha,\beta\in D \\ \alpha\leq\beta}}$

nazywamy parę złożoną z obiektu i morfizmów

$$\boxed{\left(\lim_{\alpha\in D} A_\alpha, \{f_\beta \in Mor(\lim_{\alpha\in D} A_\alpha, A_\beta) \mid \beta\in D\}\right)}$$

taką, że

$$\begin{tikzcd} & \lim\limits_{\alpha\in D} A_\alpha \arrow[dl, "f_\alpha"'] \arrow[dr, "f_\beta"] & \\ A_\alpha \arrow[rr, "f_{\alpha\beta}"] & & A_\beta \end{tikzcd}$$

i) $\forall \alpha,\beta\in D,\ \alpha\leq\beta:\ \boxed{f_{\alpha\beta}\circ f_\alpha = f_\beta}$,

ii) $\forall \alpha,\beta\in D,\ \alpha\leq\beta:$
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "g_\alpha"'] \arrow[dr, "g_\beta"] & \\ A_\alpha \arrow[rr, "f_{\alpha\beta}"] & & A_\beta \end{tikzcd}$$
jest przemienny $\exists!\ f_B \in Mor(B, \lim\limits_{\alpha\in D} A_\alpha)$

$\forall \alpha\in D:\ \boxed{g_\alpha = f_\alpha \circ f_B}$.

Kogranicą systemu skierowanego $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha,\beta\in D \\ \alpha\leq\beta}}$

nazywamy analogicznie zdefiniowaną parę

$$\boxed{\left(\operatorname{colim}_{\alpha\in D} A_\alpha, \{f_\beta \in Mor(A_\beta, \operatorname{colim}_{\alpha\in D} A_\alpha) \mid \beta\in D\}\right).}$$

(Morfizmy g_α i f_B też są skierowane w przeciwną stronę. Warunki zgodności przyjmują teraz postać: $\boxed{f_\beta \circ f_{\alpha\beta} = f_\alpha \text{ i } g_\alpha = f_B \circ f_\alpha}$.)