(2) OD LICZB NATURALNYCH DO RZECZYWISTYCH

Częściowym porządkiem w zbiorze X nazywamy relację $\leqslant$ spełniającą warunki:

i) $\forall x \in X: x \leqslant x$ (zwrotność)

ii) $x \leqslant y$ i $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (przechodniość)

iii) $x \leqslant y$ i $y \leqslant x \Rightarrow x = y$

Jeśli zachodzi również

iv) $\forall x, y \in X: x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$,

to $\leqslant$ nazywamy całkowitym porządkiem.

Jeśli dodatkowo mamy także

v) $\forall \emptyset \neq A \subseteq X \ \exists a_0 \in A \ \forall a \in A: a_0 \leqslant a$,

to $\leqslant$ nazywamy dobrym uporządkowaniem.

Liczby naturalne $\mathbb{N}$ konstruujemy jako zbiory:

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{\emptyset\} & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Relacja zawierania zbiorów $\subseteq$ jest dobrym uporządkowaniem $\mathbb{N}$.

<u>Dodawanie</u> $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$ definiujemy tak: $m+n$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny ze zbiorem $(m \times \{\emptyset\}) \cup (n \times \{\{\emptyset\}\})$. Podobnie definiujemy <u>mnożenie</u> $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{N}$:

$m \cdot n$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny ze zbiorem $m \times n$.

<u>Liczby całkowite</u> $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R_{\mathbb{Z}})$,

$R_{\mathbb{Z}} : \{((m,n),(p,q)) \in \mathbb{N}^4 \mid p+n = m+q\}$

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]$, jest injekcją bo

$[(m,0)] = [(n,0)] \Rightarrow m+0 = n+0 \Rightarrow m = n$.

Można sprawdzić że mamy dobrze określone operacje indukowane z $\mathbb{N}$:

i) $[(m,n)] \leq [(p,q)] \iff m+q \subseteq p+n$

ii) $[(m,n)] + [(p,q)] := [(m+p, n+q)]$

iii) $[(m,n)] \cdot [(p,q)] := [(mp+nq, mq+np)]$.

Tracimy dobre uporządkowanie: $\leq$ jest całkowitym uporządkowaniem. Zyskujemy odwracalność ze względu na dodawanie:

$[(m,n)] + [(n,m)] = [(0,0)]$, $-[(m,n)] := [(n,m)]$

Liczby ujemne to $[(0,n)] = -[(n,0)] = -n$.

Wartość bezwzględna liczby $[(m,n)] \in \mathbb{Z}$ to $\left|[(m,n)]\right| := \begin{cases} [(m \dot{-} n, 0)] & \text{jeśli } n \subseteq m \\ [(n \dot{-} m, 0)] & \text{jeśli } m \subseteq n \end{cases}$,

gdzie $l \dot{-} k$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny ze zbiorem $l \setminus k$.

Zauważmy że:

i) $\left|[(m,n)]\right| = [(0,0)] \Rightarrow [(m,n)] = [(0,0)]$

ii) $\left|[(m,n)] + [(p,q)]\right| \leqslant \left|[(m,n)]\right| + \left|[(p,q)]\right|$

iii) $\left|-[(m,n)]\right| = \left|[(m,n)]\right|$

iv) $\left|[(m,n)]\,[(p,q)]\right| = \left|[(m,n)]\right| \, \left|[(p,q)]\right|$

Liczby wymierne $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R_{\mathbb{Q}}$,

$R_{\mathbb{Q}} := \{((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+)^2 \mid ad = bc\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n\}$

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $a \longmapsto [(a,1)]$, jest injekcją,

bo $[(a,1)] = [(b,1)] \Rightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$.

Jak poprzednio indukujemy operacje z $\mathbb{Z}$:

i) $[(a,b)] \leq [(c,d)] \Leftrightarrow ad \leq cb$

ii) $[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+bc, bd)]$

iii) $[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac, bd)]$ iv) $|[(a,b)]| = [(|a|,b)]$

Zyskujemy odwracalność ze względu na mnożenie w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$:

$[(a,b)] \cdot [(\mathrm{sgn}(a) \cdot b, |a|)] = [(1,1)]$, $[(a,b)]^{-1} := [(\mathrm{sgn}(a) b, a)]$,

gdzie $\mathrm{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \leq a \text{ i } a \neq 0 \\ 0 & \text{jeśli } a = 0 \\ -1 & \text{jeśli } a \leq 0 \text{ i } a \neq 0. \end{cases}$

Zauważmy że $a = \mathrm{sgn}(a)|a|$. Ułamki właściwe to $[(1,a)] = \frac{1}{a} = a^{-1}$.

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R} := \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) / R_{\mathbb{R}}$,

$$\mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) := \{ f \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \mid \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall N \leq k : |f_k - f_N| \leq \tfrac{1}{n} \},$$

$$R_{\mathbb{R}} := \{ (f,g) \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})^{\times 2} \mid \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall N \leq k : |f_k - g_k| \leq \tfrac{1}{n} \}.$$

$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto [n \mapsto r, \forall n \in \mathbb{N}]$, jest injekcją bo $0 \leq |r - r'| \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$\Rightarrow |r - r'| = 0 \Rightarrow r = r'$.

$<$ to $\leq$ i $\neq$

Znów indukujemy operacje z $\mathbb{Q}$:

i) $[f] < [g] \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall N \leq k : f_k < g_k$

ii) $[f] + [g] := [n \mapsto f_n + g_n, \forall n \in \mathbb{N}]$

iii) $[f] \cdot [g] := [n \mapsto f_n \cdot g_n, \forall n \in \mathbb{N}]$

iv) $|[f]| := [n \mapsto |f_n|, \forall n \in \mathbb{N}]$

Zyskujemy wiele nowych operacji, w tym pierwiastek: $\forall\, 0 \leq r \in \mathbb{R} \ \exists!\, 0 \leq \sqrt{r} \in \mathbb{R} : (\sqrt{r})^2 = r$.

Mamy $\sqrt{r^2} = |r|$.