④ OD PRZESTRZENI METRYCZNYCH DO TOPOLOGICZNYCH

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{liczby} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{wartość bezwzględna } |x| \arrow[d] & & \text{porządek } x \leq y \arrow[d] \\
\text{metryka } d(x,y)=|x-y| \arrow[dr] & & \text{topologia Alexandrowa} \arrow[dl] \\
 & \text{topologia ogólna} &
\end{tikzcd}
$$

<u>Przestrzeń metryczna</u> to para (X,d), gdzie X jest zbiorem, a $X \times X \xrightarrow{d} \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem (<u>metryka</u>) spełniającym:

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Wniosek: Podstawiając $z=x$ w iii) otrzymujemy.

$$\forall x,y\in X: \quad d(x,y)=\frac{1}{2}\left(d(x,y)+d(y,x)\right)\geq\frac{1}{2}d(x,x)\geq 0.$$

Przykłady:

① $X=\mathbb{C}$, $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$.

Tak samo dla $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$

② $X=\mathbb{Q}_p$, $d_p(x,y)=|x-y|_p$, p - liczba pierwsza

Tak samo dla $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}, \text{ ale } \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|_5=\left|\frac{1}{6}\right|_5=5^0=1$$

③ $X=\mathbb{R}^n$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

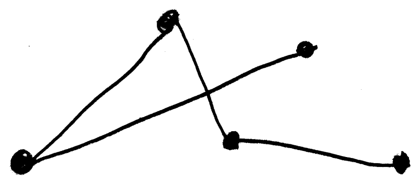
(metryka euklidesowa)

④ X - dowolny zbiór, $d(x,y)=1$, $\forall x\neq y$.

(metryka dyskretna)

⑤ $X=\mathbb{C}$, $d(z_1,z_2)=\begin{cases}|z_1|+|z_2| & \text{dla } z_1\neq z_2\\ 0 & \text{dla } z_1=z_2\end{cases}$

⑥ X = zbiór (wierzchołków nieorientowanego grafu), X' = zbiór krawędzi grafu (podzbiór zbioru 2-elementowych podzbiorów



Kropki tworzą X
Kreski tworzą X'

Graf jest spójny jeśli $\forall\, x, y \in X,\ x \neq y$
$\exists\, e_1, e_2, \dots, e_n \in X' : x \in e_1,\ y \in e_n$, jeśli $n \geqslant 2$ to
$e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset,\ e_i \neq e_{i+1},\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n-1$.
Taki ciąg nazywamy drogą od x do y, a n nazywamy jej długością. Dla spójnego grafu (X, X') metryka grafowa na X to

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ \min\{\text{długości dróg od } x \text{ do } y\} \end{cases}.$$

7 Iloczyn kartezjański: $(X, d_X) \times (Y, d_Y) = (X \times Y, d)$, gdzie

$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$ lub
$d((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y')$ lub
$d((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$.

Definicja Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) jest **ograniczony** gdy

$\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x, y \in A: \ d(x,y) \leq M.$

Przykład: W metryce p-adycznej

$\forall m,n \in \mathbb{Z}: \ d_p(m,n) = |m-n|_p = p^{k \leq 0} \leq 1.$

W metryce euklidesowej $\mathbb{Z}$ nie jest ograniczone.

Definicja Odwzorowanie $X \xrightarrow{f} Y$ pomiędzy przestrzeniami metrycznymi (X, d_X) i (Y, d_Y) nazywamy izometrią gdy

$\forall x, x' \in X: \ d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$

Wniosek: Izometria jest automatycznie injekcją: $f(x) = f(x') \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) = 0$

$\Rightarrow d_X(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'.$

Zastosowanie: Odległość Gromova–Hausdorffa pomiędzy przestrzeniami metrycznymi $\rightsquigarrow$ analiza kształtu.

R2

Ciąg Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X,d) to $f : \mathbb{N} \to X$ takie że $\forall n \geqslant 1 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geqslant N : d(f_k, f_N) \leqslant \frac{1}{n}$.

Kula otwarta w przestrzeni metrycznej (X,d) to zbiór $B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$. $(x<y \iff (x \leqslant y \text{ i } x \neq y))$. Kula otwarta jest geometrycznym prototypem zbioru otwartego w topologii ogólnej. Liczbę $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, nazywamy **promieniem** kuli, a $x_0 \in X$ **środkiem** kuli.

$B(x_0, 0) = \emptyset$. Kule są sparametryzowane zbiorem $X \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_-)$, $\mathbb{R}_- := \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$

Uzupełnieniem przestrzeni metrycznej nazywamy przestrzeń metryczną klas równoważności wszystkich jej ciągów Cauchy'ego. $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$ są różnymi uzupełnieniami metrycznymi $\mathbb{Q}$.