# ⑤ TOPOLOGIA PRZESTRZENI METRYCZNYCH

<u>Definicja:</u> Topologią w zbiorze $X$ nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{O}(X) \subseteq 2^X$ spełniającą:

① $\forall I: \left(U_i \in \mathcal{O}(X), \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}(X)\right)$

(dowolne sumy)

② $A, B \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}(X)$

(skończone przecięcia)

③ $\emptyset, X \in \mathcal{O}(X)$

Zbiory z rodziny $\mathcal{O}(X)$ nazywamy <u>otwartymi</u> a ich dopełnienia <u>domkniętymi</u> podzbiorami $X$. Zbiór $X$ z wybraną topologią nazywamy <u>przestrzenią topologiczną</u>.

<u>Topologia (nie)dyskretna</u>: $\mathcal{O}(X) = 2^X$ (dyskretna) oraz $\mathcal{O}(X) = \{\emptyset, X\}$ (niedyskretna).

<u>Twierdzenie</u>: Dla każdej przestrzeni metrycznej $(X,d)$ zbiór wszystkich sum wszystkich kul otwartych $\mathcal{O}_d(X) := \left\{ \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) \,\middle|\, I \subseteq X \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}_-) \right\}$ definiuje topologię na $X$. Taką topologię nazywamy <u>metryczną</u>. <u>Dowód</u>:

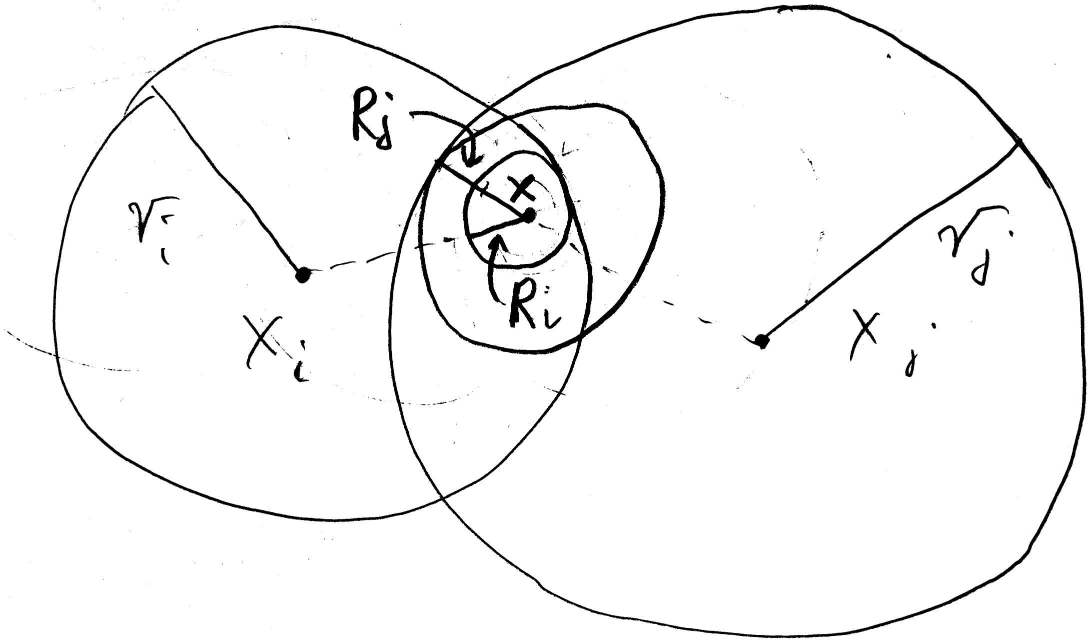
Jedynym nietrywialnym warunkiem do sprawdzenia jest

$$\bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) \cap \bigcup_{j\in J} B(x_j, r_j) \in \mathcal{O}(X).$$

Zauważmy że taki zbiór jest postaci

$$\bigcup_{i\in I,\, j\in J} B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) =$$

$$= \bigcup_{i\in I,\, j\in J} \; \bigcup_{x \in B(x_i, r_i)\cap B(x_j, r_j)} B\big(x, \min\{\underbrace{r_i - d(x,x_i)}_{=:R_i},\ \underbrace{r_j - d(x,x_j)}_{=:R_j}\}\big) \in \mathcal{O}(X).$$




$\square$

<u>Definicja</u>: Metryki $d_1$ i $d_2$ na zbiorze $X$ są <u>topologicznie równoważne</u> jeśli

$$\mathcal{O}_{d_1}(X) = \mathcal{O}_{d_2}(X).$$

Topologię $\mathcal{O}(X)$ nazywamy <u>metryzowalną</u> jeśli istnieje metryka $d$ taka że $\mathcal{O}_d(X)=\mathcal{O}(X)$

<u>Przykłady</u>: Niech $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wtedy metryki zadane przez

$$d_1((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$

$$d_3((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$$

są topologicznie równoważne.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $d_1$ i $d_2$ będą metrykami na $X$. Jeśli $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}\ \forall x,y \in X$:

$$d_1(x,y) \leq N_1 d_2(x,y) \text{ i } d_2(x,y) \leq N_2 d_1(x,y),$$

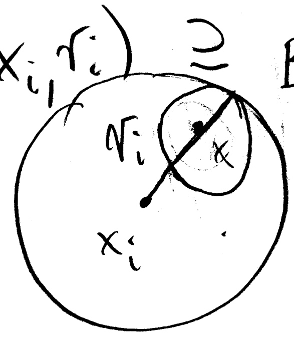
to $\mathcal{O}_{d_1}(X) = \mathcal{O}_{d_2}(X)$.

<u>Dowód</u>: Niech $A := \bigcup_{i\in I} B_1(x_i, r_i)$ będzie dowolnym zbiorem otwartym względem $d_1$. Wykażemy że

$$\forall i\in I: \quad B_1(x_i,r_i)=\bigcup_{x\in B_1(x_i,r_i)} B_2\left(x,\frac{r_i-d(x,x_i)}{N_1}\right)$$

Zauważmy najpierw że

$$B_1(x_i,r_i)\supseteq B_1(x,r_i-d_1(x,x_i))\supseteq B_2\left(x,\frac{r_i-d_1(x,x_i)}{N_1}\right)$$




Istotnie, $y\in B_2\left(x,\frac{r_i-d_1(x,x_i)}{N_1}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$N_1 d_2(y,x) < r_i - d_1(x,x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$d_1(y,x) < r_i - d_1(x,x_i) \iff y\in B_1(x,r_i-d_1(x,x_i))$$

$$\Updownarrow$$

$$d_1(y,x)+d_1(x,x_i) < r_i$$

$$\Downarrow$$

$$d_1(y,x_i) < r_i \iff y\in B_1(x_i,r_i).$$

Zatem prawa strona zawiera się w lewej.
Zawieranie odwrotne wynika stąd że

$$\forall x\in B_1(x_i,r_i): \frac{r_i-d(x,x_i)}{N_1}>0 \implies x\in B_2\left(x,\frac{r_i-d(x,x_i)}{N_1}\right)$$

Teraz wnioskujemy że dowolny zbiór otwarty względem $d_1$ jest otwarty względem $d_2$:

$$\mathcal{O}_{d_1}(x) \ni A = \bigcup_{i \in I} B_1(x_i, r_i) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ x \in B_1(x_i, r_i)}} B_2\left(x, \frac{r_i - d(x, x_i)}{N_1}\right) \in \mathcal{O}_{d_2}(x)$$

Korzystając z założenia $d_2(x,y) \leq N_2 d_1(x,y)$, $\forall x,y \in X$, analogicznie udowadniamy implikację odwrotną. $\square$

<u>Uwaga</u>: Powyższe proste kryterium topologicznej równoważności metryk nie jest zupełne: Metryka $d$ jest zawsze topologicznie równoważna metryce $d'$ danej przez $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, a nie zawsze spełnia kryterium twierdzenia. Istotnie, wystarczy wziąć przestrzeń metryczną nieograniczoną:

$$\underbrace{d(x_n, y_n)}_{\to\infty} \leq N d'(x_n, y_n) < N. \quad \text{(sprzeczność)}$$

<u>Wniosek</u>: Każda przestrzeń metryczna jest topologicznie równoważna przestrzeni ograniczonej.

<u>Zastosowanie</u>: Niech $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wtedy odwzorowanie

$$(X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y) \xrightarrow{\varrho} \mathbb{R}$$

$$\varrho(a,b) := \begin{cases} \dfrac{d_X(a,b)}{1+d_X(a,b)} & \text{gdy } a,b \in X \\ \dfrac{d_Y(a,b)}{1+d_Y(a,b)} & \text{gdy } a,b \in Y \\ 1 & \text{gdy } a \in X \text{ i } b \in Y \\ & \text{lub } a \in Y \text{ i } b \in X \end{cases}$$

zadaje metrykę na $X \sqcup Y$.

Istotnie, niech $a, b \in X$, $c \in Y$. Wtedy

$$\varrho(a,c) + \varrho(c,b) = 2 > 1 > \varrho(a,b),$$

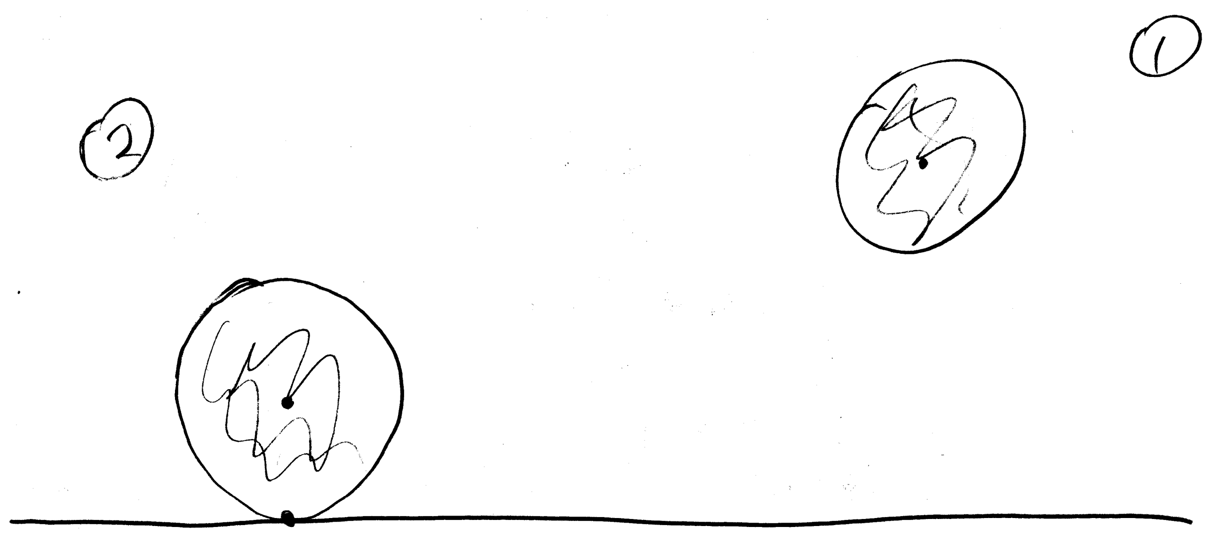
$$\varrho(a,b) + \varrho(b,c) \geq 1 = \varrho(a,c)$$

Płaszczyzna Niemyckiego: $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

$\mathcal{O}(N) := \{$ sumy zbiorów postaci ① lub ② $\}$

① $:= B((x,y), r)$ gdy $y > 0$ i $y > r$

② $:= B((x,y), r) \cup \{(x,0)\}$ gdy $r = y > 0$




Zadanie 5: Udowodnij że płaszczyzna Niemyckiego nie jest metryzowalna.

Wskazówka: Każda topologia metryczna jest normalna, tzn. $\forall C_1$ i $C_2$ domkniętych i rozłącznych $\exists U_1, U_2$ otwarte: $C_1 \subseteq U_1$, $C_2 \subseteq U_2$, i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.