Topologia produktowa na $X \times Y$ to $\mathcal{O}(X \times Y) := \left\{ \bigcup_{i \in I} U \times V \mid U \in \mathcal{O}(X) \text{ i } V \in \mathcal{O}(Y) \right\}$.

Jeśli (X, d_X) i (Y, d_Y) są przestrzeniami metrycznymi, to $\mathcal{O}(X \times Y) = \mathcal{O}_{d_i}(X \times Y)$, $i \in \{1,2,3\}$, dla metryk produktowych d_1, d_2, d_3.

Topologia podprzestrzeni (indukowana) $X \subseteq Y$ to $\mathcal{O}_Y(X) := X \cap \mathcal{O}(Y)$. W szczególności, dla przestrzeni metrycznej (X, d), $\mathcal{O}_Y(X) = \mathcal{O}_d(X)$. Np. topologia $\mathbb{Z}$ indukowana z topologii euklidesowej $\mathbb{R}$ to topologia dyskretna. Uwaga: zbiór otwarty w podprzestrzeni nie musi być otwarty w przestrzeni: wszystkie podzbiory $\mathbb{Z}$ są otwarte w $\mathbb{Z}$, tylko $\emptyset$ w $\mathbb{R}$.

⑥ PODSTAWOWE POJĘCIA TOPOLOGII OGÓLNEJ

Topologia sumy rozłącznej $X \sqcup Y$ to

$$\mathcal{O}(X \sqcup Y) = \{U \subseteq X \sqcup Y \mid U \cap X \in \mathcal{O}(X) \text{ i } U \cap Y \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

Mamy $\mathcal{O}_{X \sqcup Y}(X) = \mathcal{O}(X)$ i $\mathcal{O}_{X \sqcup Y}(Y) = \mathcal{O}(Y)$.

W szczególności, dla przestrzeni metrycznej $(X \sqcup Y, \varrho)$, biorąc $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}_{d_X}(X)$ i $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}_{d_Y}(Y)$, mamy zgodność:
$\mathcal{O}_\varrho(X \sqcup Y) = \mathcal{O}(X \sqcup Y)$. Istotnie,

$$\begin{aligned}
\forall x \in X, y \in Y, r \leq 1: \quad & B_\varrho(x, r) \cap X = B_\varrho(x, r) \in \mathcal{O}_{d_X}(X) \\
& B_\varrho(x, r) \cap Y = \emptyset \in \mathcal{O}_{d_Y}(Y) \\
& B_\varrho(y, r) \cap X = \emptyset \in \mathcal{O}_{d_X}(X) \\
& B_\varrho(y, r) \cap Y = B_\varrho(y, r) \in \mathcal{O}_{d_Y}(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in X, y \in Y, r > 1: \quad & B_\varrho(x, r) = B_\varrho(y, r) = X \sqcup Y \\
& (X \sqcup Y) \cap X = X \in \mathcal{O}_{d_X}(X) \\
& (X \sqcup Y) \cap Y = Y \in \mathcal{O}_{d_Y}(Y)
\end{aligned}$$

udowadnia $\mathcal{O}_\varrho(X \sqcup Y) \subseteq \mathcal{O}(X \sqcup Y)$. Przeciwne zawieranie wynika z $U = (U \cap X) \cup (U \cap Y)$
$= \bigcup_{i \in I} B_{d_X}(x_i, r_i) \cup \bigcup_{j \in J} B_{d_Y}(y_j, s_j) = \bigcup_{k \in K} B_\varrho(z_k, t_k)$.

Wnętrze zbioru: $\boxed{\operatorname{Int} A := \bigcup_{\substack{U\in\mathcal{O}(X)\\ U\subseteq A}} U}$

$$A \in \mathcal{O}(X) \iff A = \operatorname{Int} A \iff \forall x\in A\ \exists U\in\mathcal{O}(X): x\in U\subseteq A$$

Otoczeniem (otwartym) punktu $x\in X$ nazywa się $U\in\mathcal{O}(X)$ taki że $x\in U$. Zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego punkt zawiera się w nim wraz z otoczeniem.

Domknięcie zbioru: $\boxed{\bar{A} := \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{O}(X)\\ A\subseteq X\setminus U}} (X\setminus U)}$

$$X\setminus A \in \mathcal{O}(X) \iff A = \bar{A} \iff \left[\left(\forall U\in\mathcal{O}(X), U\ni x : A\cap U\neq\emptyset\right) \Rightarrow x\in A \right]$$

Punktem skupienia zbioru A nazywamy $x\in X$ taki że $(x\in U$ i $U\in\mathcal{O}(X)) \Rightarrow U\cap A\neq\emptyset$. Zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

<u>Przestrzeń metryczna jest zupełna</u> gdy

każdy ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma

punkt skupienia w topologii metrycznej:

$\exists\, x\in X\ \forall_{\mathcal{O}(x)\ni U\ni x} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$.

<u>Przykłady</u>: W metryce euklidesowej

$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ są zupełne, a $\mathbb{Q}$ nie jest.

W metryce p-adycznej ani $\mathbb{N}$, ani $\mathbb{Z}$, ani $\mathbb{Q}$, <u>nie</u> są zupełne:

$\left(\sum_{i=0}^{n} p^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego

w metryce p-adycznej na $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

bez punktu skupienia w $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$.

Istotnie, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ n\leq k : \left|\sum_{i=0}^{k} p^i - \sum_{j=0}^{n} p^j\right|_p =$

$= \left|\left(\sum_{i=0}^{k-n} p^i\right) p^{n+1}\right|_p = p^{-(n+1)} \leqslant 2^{-n} \leq \frac{1}{n}$. Z drugiej strony

w $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ są tylko <u>skończone</u> szeregi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n p^n$

nie mogące być punktem skupienia: $\left|\sum_{i=0}^{k} p^i - \sum_{j=1}^{m} a_j p^j\right|_p \geqslant p^{-(m+1)}$ dla $k\geqslant m+1$.

Zadanie 6: Niech $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. Udowodnij że wzór

$$d\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$

definiuje metrykę na $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Pokaż że topologia metryki zadanej wzorem

$$\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \frac{1}{2}\frac{d_1(x_1,y_1)}{1+d_1(x_1,y_1)} + \frac{1}{4}\frac{d_2(x_2,y_2)}{1+d_2(x_2,y_2)}$$

jest topologią produktową topologii metrycznych $\mathcal{O}_{d_1}(X_1)$ i $\mathcal{O}_{d_2}(X_2)$.

Zadanie 7: Topologia $\mathcal{O}(X)$ spełnia warunek oddzielania T_1 gdy $\boxed{\forall x\neq y\ \exists x\in U\in\mathcal{O}(X): y\notin U}$, a nazywana jest regularną gdy

$$\boxed{\forall C=\overline{C} \text{ i } x\notin C\ \exists C\subseteq U\in\mathcal{O}(X) \text{ i } x\in V\in\mathcal{O}(X): U\cap V=\emptyset}$$

Udowodnij że T_1 - topologia jest regularna $\iff \forall x\in X$ i $x\in U\in\mathcal{O}(X)\ \exists x\in V\in\mathcal{O}(X): \overline{V}\subseteq U$.
Wywnioskuj stąd że płaszczyzna Niemyckiego jest regularna.