7 QUASI PORZĄDEK I TOPOLOGIA ALEXANROVA

<u>Quasi porządek</u> w zbiorze X to relacja $\leq$ spełniająca:

i) $x \leq x$, $\forall x \in X$ (zwrotność),

ii) $x \leq y$ i $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (przechodniość).

Zbiór $U \subseteq X$ jest <u>górny</u>, jeśli

$$\boxed{(u \in U \text{ i } u \leq v) \Longrightarrow v \in U}$$

Oznaczamy $\uparrow U := \bigcup_{x \in U} \uparrow x$, gdzie $\uparrow x := \{y \in X \mid x \leq y\}$.

Zatem A jest górny $\Longleftrightarrow A = \uparrow A$. Mamy

$\uparrow \emptyset = \emptyset$ oraz $\uparrow X = X$. Mamy też że dowolna suma górnych zbiorów jest górna:

$$\bigcup_{i \in I} \uparrow U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in U_i} \uparrow x = \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in I} U_i} \uparrow x = \uparrow \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Wreszcie przecięcie zbiorów górnych jest górne bo $x \in \uparrow U \cap \uparrow V$ i $x \leq y$

$\Longrightarrow (x \in \uparrow U \text{ i } x \leq y)$ i $(x \in \uparrow V \text{ i } x \leq y) \Longrightarrow y \in \uparrow U \cap \uparrow V$.

Udowodniliśmy zatem:

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnego zbioru X z dowolnym quasi porządkiem $\leq$, zbiór wszystkich zbiorów górnych $\mathcal{U}(X, \leq)$ zadaje topologię na X.

Taką topologię nazywamy <u>topologią Alexandrova</u> quasi porządku $\leq$.

<u>Uwaga</u>: W przeciwieństwie do topologii metrycznej, przecięcie <u>dowolnej</u> ilości zbiorów otwartych w topologii Alexandrova jest otwarte. Cecha ta kompletnie charakteryzuje topologię Alexandrova: Każda topologia o tej własności jest topologią Alexandrova jakiegoś quasi porządku.

<u>Przykład</u>: Quasi porządek liczb zespolonych:

$$z_1 \leq z_2 \iff |z_1| \leq |z_2|$$

Zbiory domknięte w topologii Alexandrova to zbiory dolne: $X \setminus A \in \mathcal{U}(X, \leq) \Leftrightarrow$

$$(x \in X \setminus A \text{ i } x \leq y) \Rightarrow y \in X \setminus A$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A \text{ lub } \sim(x \leq y) \Leftarrow y \in A$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A \text{ lub } \sim(x \leq y) \text{ lub } y \notin A$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A \text{ lub } \sim(x \leq y \text{ i } y \in A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x \in A \Leftarrow (x \leq y \text{ i } y \in A)}$$

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A jest zbiorem <u>dolnym</u>.

Stosujemy podobne oznaczenia:

$$\downarrow A := \bigcup_{x \in A} \downarrow x, \quad \downarrow x := \{y \in X \mid y \leq x\}$$

A jest zbiorem dolnym $\Leftrightarrow A = \downarrow A$

Uwaga: Zamiana quasi porządku $\leq$ na $\leq^{op}$, $x \leq^{op} y \iff y \leq x$, zamienia zbiory górne z dolnymi, a więc otwarte z domkniętymi.

Aczkolwiek $\mathrm{Int}\, A = A \iff A = \uparrow A$, ogólnie $\mathrm{Int}\, A \neq \uparrow A$.

Za to nie tylko $\overline{A} = A \iff A = \downarrow A$, ale także:

$\boxed{\text{Lemat: } \overline{A} = \downarrow A, \ \forall A \subseteq X}$

Dowód:

$\downarrow A$ jest dolny $\Rightarrow \overline{\downarrow A} = \downarrow A \Rightarrow$

$$\downarrow A \supseteq \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C = \overline{C}}} C = \overline{A}.$$ Odwrotnie,

najmniejsze otoczenie otwarte y

$$x \in A \text{ i } y \leq x \Rightarrow \uparrow y \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall_{y \in U \in \mathcal{U}(X, \leq)} U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow y \text{ jest punktem skupienia } A$$

$\Rightarrow y \in \overline{A}$. Zatem $x \in A \Rightarrow \downarrow x \subseteq \overline{A}$.

Stąd $\downarrow A = \bigcup_{x \in A} \downarrow x \subseteq \overline{A}$. $\square$

Uwaga: $\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A} = \downarrow A$

$$\operatorname{Int}^{op} A \subseteq A \subseteq \overline{A}^{op} = \uparrow A$$

Quasi porządek topologii $\mathcal{O}(X)$ to relacja na X zdefiniowana przez

$$\boxed{x \precsim y \iff \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}}$$

Twierdzenie: Quasi porządek topologii Alexandrowa $\mathcal{U}(X, \leq)$ jest tożsamy z wyjściowym quasi porządkiem $\leq$.

Dowód: $x \precsim y \iff$

$$\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}} \iff x \in \overline{\{y\}} \overset{\text{z Lematu}}{\iff}$$

$$x \in \downarrow y \iff x \leq y \quad \square$$

Wniosek: Topologia Alexandrowa $\mathcal{U}(X, \leq)$ jest nietrywialna $\iff$ gdy nie jest T_1.

Istotnie, T_1 jest równoważne $\{x\} = \overline{\{x\}}$, $\forall x \in X$, a to jest równoważne trywialności quasi porządku ($\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}} \iff x = y$). Z twierdzenia jest to równoważne $\mathcal{U}(X, \leq) = 2^X$.

Twierdzenie: Jeśli $\mathcal{O}(X)$ jest topologią spełniającą warunek że przecięcie dowolnej ilości zbiorów otwartych jest otwarte, to jest ona tożsama z topologią Alexandrowa swojego quasi porządku: $\mathcal{O}(X) = \mathcal{U}(X, \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}})$.

Dowód: Mamy wykazać że domknięcie w topologii Alexandrowa jest tożsame z oryginalnym: $\forall A \subseteq X: \downarrow A = \overline{A}$.
Najpierw zauważmy że $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\} =$

$$= \{y \in X \mid y \in \overline{\{x\}}\} = \overline{\{x\}}.$$

Stąd

$$\downarrow A = \bigcup_{x \in A} \downarrow x = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}} \subseteq \overline{A}.$$

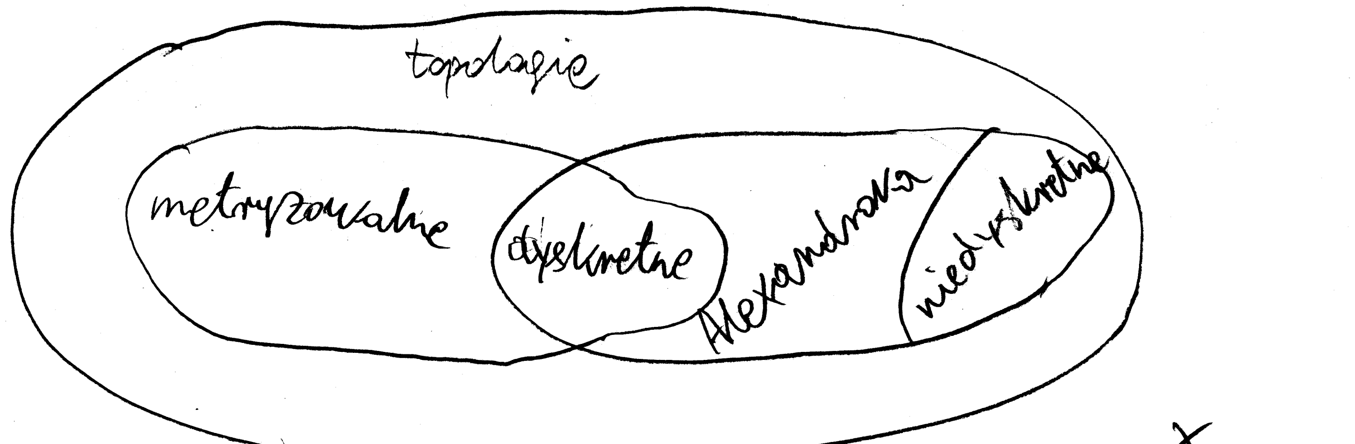
Z drugiej strony, na mocy założenia że przecięcie dowolnej ilości zbiorów otwartych jest otwarte, $\bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$ jest domknięte. Zatem

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq C = \overline{C}} C \subseteq \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}} = \downarrow A. \ \square$$

Uwaga: Metrycznym odpowiednikiem twierdzenia charakteryzującego topologię Alexandrova jest Twierdzenie Bing–Nagata–Smirnov mówiące że przestrzeń topologiczna jest metryzowalna $\Longleftrightarrow$ jej topologia spełnia pewne założenie przeliczalności oraz warunki oddzielania T_1 i regularności. Warunek T_1 i regularność implikują warunek Hausdorffa:

$$\boxed{\forall\, x \neq y \ \ \exists\, x \in U \in \mathcal{O}(X),\ y \in V \in \mathcal{O}(X) : U \cap V = \emptyset}.$$

Zestawienie topologii metrycznej i Alexandrova:



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B\left(x, \tfrac{1}{n}\right) = \{x\} \in \mathcal{O}(X) \Longrightarrow \mathcal{O}(X) = 2^X$$