8 PRZYKŁADY I ZASTOSOWANIA QUASI PORZĄDKÓW

<u>Krata</u> $(\Lambda, \vee, \wedge)$ to zbiór Λ z dwoma łącznymi działaniami spełniającymi:

i) $x \vee y = y \vee x$ i $x \vee x = x$, $\forall x, y \in \Lambda$,

ii) $x \wedge y = y \wedge x$ i $x \wedge x = x$, $\forall x, y \in \Lambda$,

iii) $x = x \vee (x \wedge y)$, $\forall x, y \in \Lambda$, } prawa absorpcji

iv) $x = x \wedge (x \vee y)$, $\forall x, y \in \Lambda$. }

Relacja $\boxed{x \leq y \iff \exists z \in \Lambda : y = x \vee z}$ zadaje <u>częściowy porządek</u> na Λ. Częściowość wynika z praw absorpcji: $x \leq y$ i $y \leq x$ $\Rightarrow$ $x = y \vee z_1$ i $y = x \vee z_2$ $\Rightarrow$ $y \wedge x = y \wedge (y \vee z_1) = y$ i $x \wedge y = x \wedge (x \vee z_2) = x \xRightarrow{y \wedge x = x \wedge y} x = y$. Każdy częściowy porządek spełniający kilka dodatkowych warunków pochodzi od kraty.

<u>Przykład</u>: Krata 2^X z operacjami $\cup$ i $\cap$. Jej częściowy porządek to $\subseteq$. Istotnie,

$A \leq B \Rightarrow \exists C : B = A \cup C \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup B \Rightarrow A \leq B$.

Przykład: $(\mathbb{R}, \leq)$. Zbiory otwarte w topologii Alexandrowa to półproste $\uparrow x := \{y \in \mathbb{R} \mid x \leq y\}$ lub $\{y \in \mathbb{R} \mid x \leq y \text{ i } x \neq y\}$.

Quasi porządek topologii euklidesowej $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ jest trywialny:

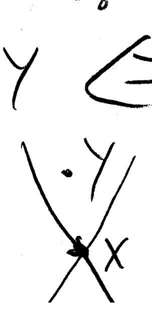
$$x \lesssim y \iff \mathbb{R} \setminus \{x\} \supseteq \mathbb{R} \setminus \{y\} \iff$$

$$\{x\} \subseteq \{y\} \iff x = y.$$

Topologia quasi porządku trywialnego jest zawsze dyskretna: $\mathcal{U}(X, x \leq x) = 2$

Uwaga: Quasi porządkiem na X jest też relacja $x \leq y$, $\forall x, y \in X$. Jego topologia Alexandrowa jest niedyskretna: $\mathcal{U}(X, x \leq y, \forall x, y \in X) = \{\emptyset, X\}$.

Przykład: Quasi porządkiem na przestrzeni Minkowskiego jest relacja $x \leq y \iff y$ jest w stożku przyszłości x:



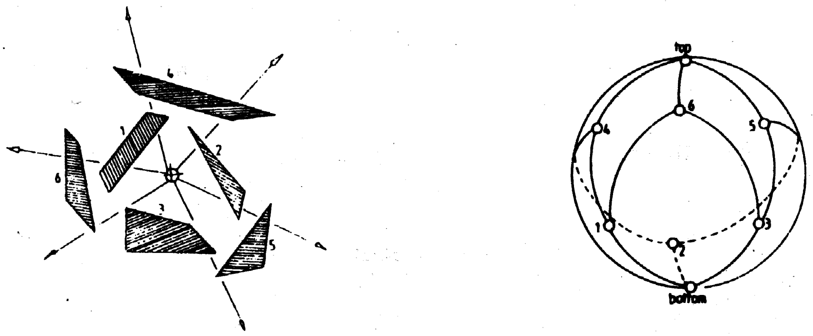


Figure 2: (i) One-light source order; (ii) with top and bottom adjoined the one-light source order becomes a spherical order

Figure 3: (i) One-directional blocking order; (ii) with top and bottom adjoined the one-light source order becomes a planar lattice

Here is a combinatorial model for iceflow analysis (its motion planning, separability, and visibility) based on *order.*

Consider a family of disjoint convex figures on the plane, and a "light source" located at a point p on the plane disjoint from all of the convex figures. A figure B ***obstructs*** a figure A (or B ***blocks*** A) if there is a point $b \in B$ such that the line joining p to b intersects A. Write $A \to B$. More generally, write $A < B$ if there is a sequence $A = A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k = B$. This relation $<$ is transitive and, if there are no directed cycles, then it is antisymmetric, too, in which case we call it a *one-light source order.* (See Figure 2.)

If the light source p is located outside the convex closure of these figures then the relation $<$ is certainly antisymmetric and, if p is located far from the convex closure, then the light source would appear to cast a parallel beam of light. In this case, the model actually coincides with a motion planning model, according to which each figure is assigned a common direction of motion and a figure B ***blocks*** a figure A if there is a line joining a point of A to a point of B along this common direction. We call the transitive closure of this blocking relation a *one-directional blocking order.* (See Figure 3.)

There are indications that order, even lattices, may well play a central role in these motion planning problems. The important properties are closely linked to the graphical data structures we use to represent ordered sets. The chief one is the *upward drawing* (alias, *diagram, line diagram, Hasse diagram, directed (acyclic) covering graph*) according to which the elements of an ordered set P are drawn on a surface, usually the plane, as disjoint small circles, arranged in such a way that, for $a, b \in P$, the circle corresponding to a is higher that the circle corresponding to b whenever $a > b$ and a monotonic arc is drawn to join them just if a *covers* b (that is, for each $x \in P$, $a > x \geq b$ implies $x = b$). We also say that a is an

45

<u>Pokrycie</u> otwarte (domknięte) zbioru X to rodzina zbiorów otwartych (domkniętych) $\{U_i\}_{i\in I}$ takich że $\boxed{\bigcup_{i\in I} U_i = X}$.

Każde pokrycie X <u>zadaje na X naturalny quasi-porządek</u>: $\boxed{x \leq y \iff \{i\in I \mid x\in U_i\} \subseteq \{i\in I \mid y\in U_i\}}$.

Zadaje też relację równoważności na X:
$x \sim y \iff (x\in U_i \iff y\in U_i, \forall i\in I)$.

Przestrzeń ilorazowa $X/\sim$ układa się zawsze do $2^I\setminus\{\emptyset\}$: $[x] \xmapsto{F} \{i\in I \mid x\in U_i\}$. Iniekcja F zachowuje quasi porządek: $x\leq y \Rightarrow F(x)\subseteq F(y)$.

Naturalna topologia na $2^I\setminus\{\emptyset\}$ pomocna w badaniu X to topologia Aleksandrowa.

<u>Otwarty problem Dedekinda</u>: Krata podzbiorów jest zawsze kratą dystrybutywną:
$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$, $\forall x,y,z$.

Załóżmy że I jest zbiorem n-elementowym. Wtedy F jest surjekcją $\iff$ krata P generowana przez $\{U_i\}_{i\in I}$ jest <u>wolna</u>, tzn. $\forall$ kraty dystrybutywnej Λ generowanej przez $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ $\exists$ homomorfizm

Finite free distributive lattices

By Koichi YAMAMOTO

(Received March 9, 1954)

1.—Introduction.—The problem to determine the order $f(n)$ of the free distributive lattice $FD(n)$ generated by n symbols $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ was first proposed by Dedekind, but very little is known about this number [1, p. 146]. Only the first six values of $f(n)$ are computed, and enumerations of further $f(n)$ appear to lie beyond the scope of any reasonable methods known today. It might, however, be pointed out that Morgan Ward, who found $f(6)$ by the help of computing machines, stated [2] an asymptotic relation

$$\log_2 \log_2 f(n) \sim n$$

and that the present author proved in a previous note [3] that

$$f(n) \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{if} \quad n \equiv 0 \pmod 2).$$

An inspection of numerical results $f(n)$, $n \leqq 6$ suggests strongly the following asymptotic equivalence

$$(*) \qquad \log_2 f(n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2^n n^{-\frac{1}{2}}.$$

The author cannot prove or disprove this interesting relation, but he proves in the present paper that

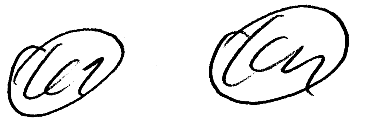
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2^n n^{-\frac{1}{2}}(1+O(n^{-1})) < \log_2 f(n) < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2^n n^{-\frac{1}{2}} \log_2 \sqrt{\frac{n\pi}{2}}\,(1+O(n^{-1}))$$

Porównaj ze wzorem Stirlinga:

$n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$, czyli $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$.

---

krat $P \xrightarrow{\varphi} \Lambda$ taki że $\varphi(\gamma_i) = \lambda_i$, $\forall i \in I$.
Odwzorowanie $R \xrightarrow{f} S$ pomiędzy kratami $(R, \vee_R, \wedge_R)$ i $(S, \vee_S, \wedge_S)$ nazywamy homomorfizmem gdy $\forall x, y \in R$: $f(x \vee_R y) = f(x) \vee_S f(y)$ i $f(x \wedge_R y) = f(x) \wedge_S f(y)$.

Zadanie 8: Przestrzeń topologiczną X nazywamy **spójną** gdy $A \cup B = X$ i $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$ $\Rightarrow$ $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$. Np. $[a,b]$ jest spójny, zbiór  jest niespójny.

Udowodnij że zbiór wszystkich skończonych niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$ jest spójny w topologii Alexandrowa naturalnego quasi porządku $\subseteq$.

Zadanie 9: Niech Λ będzie dowolną kratą. Udowodnij że warunek rozdzielności

i) $\boxed{x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad \forall x,y,z \in \Lambda}$

jest równoważny warunkowi rozdzielności

$\boxed{\text{ii)} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad \forall x,y,z \in \Lambda}$.

Kratę spełniającą te warunki nazywamy kratą **dystrybutywną**. Policz ile elementów ma wolna krata dystrybutywna generowana przez zbiory A, B, C, przecinające się jak na obrazku:

.