⑨ GRANICE CIĄGÓW UOGÓLNIONYCH

Zbiór skierowany to zbiór z relacją quasi porządku $\leq$ takiż że

$$\boxed{\forall x, y \in X \ \exists z \in X : x \leq z \text{ i } y \leq z}$$

Przykład: Każda krata jest zbiorem skierowanym: $x \leq x \vee y$ i $y \leq x \vee y$.

Współkońcowym podzbiorem zbioru skierowanego $(P, \leq)$ nazywamy podzbiór $Q \subseteq P$ spełniający warunek $\boxed{\forall p \in P \ \exists q \in Q : p \leq q}$

Przykład: Podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ jest współkońcowy z $\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $|X| = \infty$.

Przykład: Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór wszystkich kul $B(x_0, r)$, $r \in \mathbb{N}$, jest zbiorem współkońcowym zbioru skierowanego (przez $\subseteq$) wszystkich ograniczonych podzbiorów X.

Ciąg uogólniony to odwzorowanie ze zbioru skierowanego D do przestrzeni topologicznej X. Ciągi uogólnione często oznaczamy przez $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$. W przypadku $D = \mathbb{N}$ (skierowanemu standardowym $\leq$), ciąg uogólniony nazywamy ciągiem.

Granica ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ to podzbiór $\lim_{\alpha\in D} x_\alpha \subseteq X$ zdefiniowany przez

$$p \in \lim_{\alpha\in D} x_\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \mathcal{O}(x) \ni U \ni p \quad \exists\, \alpha_0 \in D \quad \forall\, \alpha_0 \leq \alpha : \; x_\alpha \in U$$

Przykład: $D = \mathbb{N}$, (X, d) - przestrzeń metryczna. Wtedy

$$p \in \lim_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall B(p,\varepsilon) \ni p \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n_0 \leq n : x_n \in B(p,\varepsilon)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n_0 \leq n : d(p, x_n) < \varepsilon.$$

<u>Twierdzenie</u>: Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią <u>Hausdorffa</u> $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \text{ ciągu uogólnionego } \{x_\alpha\}_{\alpha\in D}: \left|\lim_{\alpha\in D} x_\alpha\right| \leq 1}$$

Innymi słowy $\lim_{\alpha\in D} x_\alpha = \emptyset$ (granica nie istnieje)

lub $\lim_{\alpha\in D} x_\alpha = \{x\}$ (piszemy $\lim_{\alpha\in D} x_\alpha = x$).

<u>Uwaga</u>: Jeśli $D = \mathbb{N}$ (ze standardowym porządkiem), piszemy $\lim_{n\to\infty}$.

<u>Dowód</u>: Załóżmy że X jest przestrzenią Hausdorffa i $p, q \in \lim_{\alpha\in D} x_\alpha$. Wtedy

$\forall \mathcal{O}(X) \ni U_1 \ni p$, $\mathcal{O}(X) \ni U_2 \ni q$ $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in D$:

$x_\alpha \in U_1$, $\forall \alpha_1 \leq \alpha$, i $x_\beta \in U_2$, $\forall \alpha_2 \leq \beta$.

Z drugiej strony, $\exists \gamma_0 \in D: \alpha_1 \leq \gamma_0$ i $\alpha_2 \leq \gamma_0$

Zatem $\forall \mathcal{O}(X) \ni U_1 \ni p$, $\mathcal{O}(X) \ni U_2 \ni q$ $\exists \gamma_0 \in D$:

$x_{\gamma_0} \in U_1 \cap U_2$. Stąd $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, co implikuje $p = q$, a więc $\left|\lim_{\alpha\in D} x_\alpha\right| \leq 1$.

Odwrotnie, przypuśćmy że X <u>nie</u> jest przestrzenią Hausdorffa. Wtedy $\exists\, p \neq q$:

$D := \{U_1 \cap U_2 \mid U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X),\ U_1 \ni p,\ U_2 \ni q\}$ jest zbiorem niepustych podzbiorów X skierowanym przez $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Zdefiniujmy ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ wybierając z każdego niepustego zbioru α jakiś jego element. Wtedy $\forall\, \mathcal{O}(x) \ni U_1 \ni p$ $\exists\, \alpha_0 := U_1 \cap U_2$ (dla jakiegoś $\mathcal{O}(x) \ni U_2 \ni q$)

$\forall\, U_1 \cap U_2 \supseteq \alpha : x_\alpha \in \alpha \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$.

Zatem $p \in \lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha$. Podobnie $q \in \lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha$.

Stąd $|\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha| \geqslant 2$. $\square$

<u>Przykłady</u>: Niech $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ będzie dowolnym ciągiem uogólnionym. Wtedy

① $\mathcal{O}(x) = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha = X$

② $\mathcal{O}(x) = 2^X \Rightarrow (x = \lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha \Leftrightarrow \exists\, \alpha_0 \in D\ \forall \alpha_0 \leq \alpha : x_\alpha = x)$

③ $\mathcal{O}_d(x)$ - topologia metryczna, $\alpha \leq \beta$, $\forall \alpha, \beta \in D$

$\Rightarrow (x = \lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha \Leftrightarrow x_\alpha = x,\ \forall \alpha \in D)$

④ D = zbiór skończony $\Rightarrow \exists\, M \in D\ \forall \alpha \in D : \alpha \leq M$.
Wtedy $x_M \in \lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha$ dla każdej topologii $\mathcal{O}(X)$.

<u>Uwaga</u>: $\boxed{x \in \lim_{\alpha\in D} x_\alpha \Rightarrow x \in \overline{\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}}}$, tzn. :)

każdy element $\lim_{\alpha\in D} x_\alpha$ jest punktem skupienia zbioru $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$. Natomiast nie każdy punkt skupienia jest granicą:

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \emptyset$ a -1 i 1 są punktami skupienia zbioru $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Twierdzenie</u>: $\boxed{x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_\alpha\}_{\alpha\in D} \subseteq A : x \in \lim_{\alpha\in D} x_\alpha}$

<u>Dowód</u>: Niech $D := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \ni x\}$ będzie zbiorem skierowanym przez $V \leq W \Leftrightarrow V \supseteq W$. Z $x \in \bar{A}$ wynika, że $\forall U \in D \, \exists x_U \in U \cap A$. Ciąg uogólniony $\{x_U\}_{U\in D} \subseteq A$ spełnia warunek $\forall \mathcal{O}(X) \ni U \ni x \; \exists \alpha_0 = U \in D \; \forall U \supseteq V \in D$:
$x_V \in V \cap A \subseteq V \subseteq U$, więc $x \in \lim_{U\in D} x_U$.
Odwrotna implikacja jest oczywista. $\square$

Podciągiem uogólnionym ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ nazywamy ciąg uogólniony $\{y_\beta\}_{\beta\in E}$ jeśli $\exists\, E \xrightarrow{\varphi} D$:

i) $\forall \alpha_0 \in D\ \exists \beta_0 \in E : \beta_0 \leq \beta \Rightarrow \alpha_0 \leq \varphi(\beta)$,

ii) $\forall \beta \in E : y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$.

Uwaga: Warunek i) jest spełniony jeśli $\beta \leq \beta' \Rightarrow \varphi(\beta) \leq \varphi(\beta')$ i $\varphi(E)$ jest zbiorem współkońcowym z D. Istotnie, $\forall \alpha_0 \in D$ $\exists \beta_0 \in E : \alpha_0 \leq \varphi(\beta_0)$. Zatem $\beta_0 \leq \beta$ implikuje że $\alpha_0 \leq \varphi(\beta_0) \leq \varphi(\beta)$.

Twierdzenie: Jeśli $\{y_\beta\}_{\beta\in E}$ jest podciągiem uogólnionym ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$, to $\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha \subseteq \lim\limits_{\beta\in E} y_\beta$.

Dowód: Niech $x \in \lim\limits_{\alpha\in D}$. Otrzymujemy

$$\forall\, \mathcal{O}(x) \ni U \ni x\ \exists \alpha_0 \in D\ \forall \alpha_0 \leq \alpha : x_\alpha \in U.$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, \mathcal{O}(x) \ni U \ni x\ \exists \beta_0 \in E : \beta_0 \leq \beta \Rightarrow \alpha_0 \leq \varphi(\beta) \Rightarrow x_{\varphi(\beta)} = y_\beta \in U.$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, \mathcal{O}(x) \ni U \ni x\ \exists \beta_0 \in E\ \forall \beta_0 \leq \beta : y_\beta \in U,$$ tzn., $x \in \lim\limits_{\beta\in E} y_\beta$. □

Przykłady: ① $\emptyset = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \subseteq \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \{1\}$,

② $\{0\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \subseteq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \{0\}$.

Zadanie 10: Określamy ciąg rekurencyjny $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jak następuje:

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, $\forall 2\leq n$.

Oblicz $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Całka Riemanna jako granica ciągu uogólnionego. Niech $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ będzie odcinkiem a $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ funkcją. Niech $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ będzie dowolnym skończonym podziałem $[a,b]$ a $t_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, wyborem punktów z pododcinków. Punktowanym podziałem $[a,b]$ nazywamy ~~nazywamy~~ parę $P_n = (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b, \{t_i\in[x_i,x_{i+1}]\}_{i\in\{0,\ldots,n-1\}})$. Średnicą punktowanego podziału P_n nazywamy

$d(P_n) = \max\limits_{i \in \{0,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)$. Niech $D_{[a,b]}$ oznacza zbiór wszystkich skończonych punktowanych podziałów $[a,b]$ skierowanych przez relację $P_n \leq Q_m \Leftrightarrow d(P_n) \geq d(Q_m)$.

Zdefiniujmy teraz ciąg uogólniony

$$f_{P_n} = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \in \mathbb{R}.$$ Wtedy

$$\boxed{\int_{[a,b]} f = \lim_{P_n \in D_{[a,b]}} f_{P_n}} = \int_a^b f$$

Loosely speaking, the Riemann integral is the limit of the Riemann sums of a function as the partitions get finer. If the limit exists then the function is said to be **integrable** (or more specifically **Riemann-integrable**). The Riemann sum can be made as close as desired to the Riemann integral by making the partition fine enough.

One important fact is that the mesh of the partitions must become smaller and smaller, so that in the limit, it is zero. If this were not so, then we would not be getting a good approximation to the function on certain subintervals. In fact, this is enough to define an integral. To be specific, we say that the Riemann integral of f equals s if the following condition holds:

> For all $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for any tagged partition $x_0, \ldots, x_n$ and $t_0, \ldots, t_{n-1}$ whose mesh is less than δ, we have
>
> $$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - s\right| < \varepsilon.$$

However, there is an unfortunate problem with this definition: it is very difficult to work with. So we will make an alternate definition of the Riemann integral which is easier to work with, then prove that it is the same as the definition we have just made. Our new definition says that the Riemann integral of f equals s if the following condition holds:

> For all $\varepsilon > 0$, there exists a tagged partition $x_0, \ldots, x_n$ and $t_0, \ldots, t_{n-1}$ such that for any refinement $y_0, \ldots, y_m$ and $s_0, \ldots, s_{m-1}$ of $x_0, \ldots, x_n$ and $t_0, \ldots, t_{n-1}$, we have
>
> $$\left|\sum_{i=0}^{m-1} f(s_i)(y_{i+1} - y_i) - s\right| < \varepsilon.$$

Both of these mean that eventually, the Riemann sum of f with respect to any partition gets trapped close to s. Since this is true no matter how close we demand the sums be trapped, we say that the Riemann sums converge to s. These definitions are actually a special case of a more general concept, a net.

As we stated earlier, these two definitions are equivalent. In other words, s works in the first definition if and only if s works in the second definition. To show that the first definition implies the second, start with an ε, and choose a δ that satisfies the condition. Choose any tagged partition whose mesh is less than δ. Its Riemann sum is within ε of s, and any refinement of this partition will also have mesh less than δ, so the Riemann sum of the refinement will also be within ε of s. To show that the second definition implies the first, it is easiest to use the Darboux integral. First one shows that the second definition is equivalent to the definition of the Darboux integral; for this see the page on Darboux integration. Now we will show that a Darboux integrable function satisfies the first definition. Fix ε, and choose a partition $y_0, \ldots, y_m$ such that the lower and upper Darboux sums with respect to this partition are within $\varepsilon/2$ of the value s of the Darboux integral. Let r equal the supremum of $|f(x)|$ on $[a,b]$. If $r = 0$, then f is the zero function, which is clearly both Darboux and Riemann integrable with integral zero. Therefore we will assume that $r > 0$. If $m > 1$, then we choose δ to be less than both $\varepsilon/2r(m-1)$ and $\min_{0 \le i \le m-1} y_{i+1} - y_i$. If $m = 1$, then we choose δ to be less than one. Choose a tagged partition $x_0, \ldots, x_n$ and $t_0, \ldots, t_{n-1}$. We must show that the Riemann sum is within ε of s.

Topologia ilorazowa jako źródło przestrzeni nieHausdorffa.

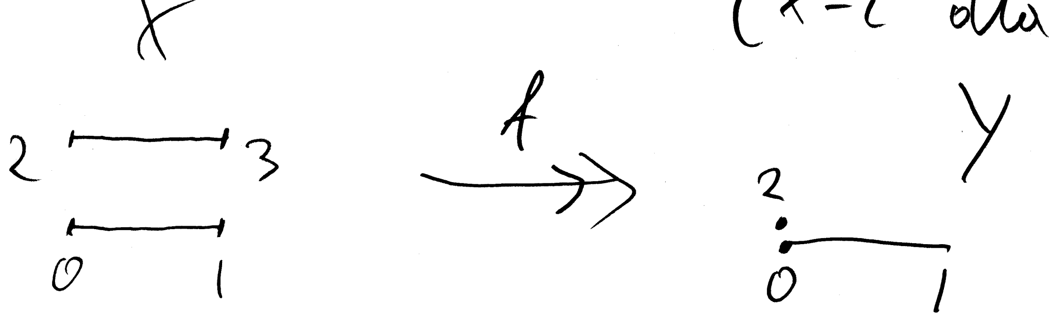
Niech X będzie przestrzenią topologiczną, Y zbiorem, a $X \xrightarrow{f} Y$ surjekcją. Topologię ilorazową Y względem f nazywamy

$$\mathcal{O}(Y) = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)\}.$$

Przypomnijmy: $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$.

Przykład: $X = [0,1] \cup [2,3]$ z euklidesową topologią, $Y = [0,1] \cup \{2\}$ jest zbiorem. Niech $X \xrightarrow{f} Y$ będzie dane przez

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1] \\ 2 & \text{dla } x = 2 \\ x-2 & \text{dla } x \in]2,3] \end{cases}.$$



$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \{0, 2\} \text{ bo } 2 \in U \in \mathcal{O}(Y)$$

$$\Rightarrow \exists\, 0 < \delta \leq 1 : [2, 2+\delta[\;\subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow$$

$$]0, \delta[\;\subseteq U \Rightarrow \left(\forall\, [\delta^{-1}] + 1 \leq n : \frac{1}{n} \in U\right).$$