① Udowodnij że $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$.

② Udowodnij że baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ jest nieprzeliczalna.

③ Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k, a $V^* := \mathrm{Hom}(V, k)$

$$:= \left\{ f \in \mathrm{Map}(V, k) \mid \begin{array}{l} f(v+v') = f(v) + f(v'),\ f(\alpha v) = \alpha f(v) \\ \forall v, v' \in V,\ \alpha \in k. \end{array} \right\}$$

przestrzenią dualną. Udowodnij że baza V^* jest skończona lub nieprzeliczalna.

④ Pierścieniem Cuntza $\mathcal{O}_n$ nazywamy pierścień generowany przez generatory $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, spełniające relacje $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$ i $b_k a_l = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = l \\ 0 & \text{dla } k \neq l \end{cases}$

Jak każdy pierścień, $\mathcal{O}_n$ jest wolnym modułem nad sobą samym z jedno-elementową bazą $\{1\}$. Znajdź n-elementową bazę $\mathcal{O}_n$ nad $\mathcal{O}_n$ zakładając że $\mathcal{O}_n \neq 0$. [1]

(5) Udowodnij że $\mathbb{R}^2$ <u>nie</u> jest modułem wolnym nad $M_2(\mathbb{R})$.
Tutaj $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(A,v) \mapsto Av$,
$(Av)_i := \sum_{j=1}^{2} A_{ij} v_j$.

(6) Niech E będzie lewym A-modułem, F prawym B-modułem, a G (A,B)-bi-modułem. Wtedy ${}_A\mathrm{Hom}(E,G) := \{f \in \mathrm{Map}(E,G) \mid f(e+e') = f(e)+f(e'),\ f(ae) = af(e),\ \forall e,e' \in E, a \in A\}$ jest prawym B-modułem ze strukturą
$(f+g)(e) := f(e)+g(e)$, $(fb)(e) = f(e)b$.
Podobnie, $\mathrm{Hom}_B(F,G)$ jest lewym A-modułem. Udowodnij że grupy abelowe ${}_A\mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}_B(F,G))$ i $\mathrm{Hom}_B(F, {}_A\mathrm{Hom}(E,G))$ są izomorficzne.