① **Własność uniwersalna**: Niech $M$ będzie $(A,B)$-bimodułem, $N$ $(B,C)$-bimodułem, $K$ $(A,C)$-bimodułem. Udowodnij że

$\forall\, M\times N \xrightarrow{F} K$: $F(m+m',n)=F(m,n)+F(m',n)$, $F(m,n+n')=F(m,n)+F(m,n')$, $F(am,n)=aF(m,n)$, $F(mb,n)=F(m,bn)$, $F(m,nc)=F(m,n)c$, $\forall\, m,m'\in M,\ n,n'\in N,\ a\in A,\ b\in B,\ c\in C$,

$\exists!\ \tilde{F}\in {}_A\mathrm{Hom}_C(M\underset{B}{\otimes}N,\ K)$ : $\boxed{\tilde{F}\circ\pi=F}$,

gdzie $\pi(m,n):=m\otimes n$, $\forall\, m\in M,\ n\in N$.

② Ile elementów ma grupa Abelowa

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ?$$

③ Udowodnij izomorficzność grup Abelowych

$$\mathrm{Map}_f(X,\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathrm{Map}_f(Y,\mathbb{Z})\cong\mathrm{Map}_f(X\times Y,\mathbb{Z}),$$

gdzie $\mathrm{Map}_f$ oznacza wszystkie odwzorowania o skończonych nośnikach.

④ Udowodnij izomorficzność grup Abelowych: $M\underset{R}{\otimes}R\cong M$, $\forall\, M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_R)$.

(5) Ciągiem dokładnym homomorfizmów R-modułów nazywamy ciąg homomorfizmów

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

spełniających $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.
Prawy R-moduł nazywamy *płaskim* jeśli dokładność ciągu $0 \to K \xrightarrow{f} L$, ($f \in {}_R\operatorname{Hom}(K,L)$) implikuje dokładność ciągu $0 \to M \otimes_R K \xrightarrow{id \otimes_R f} M \otimes_R L$. Taki moduł nazywamy *wiernie płaskim* jeśli dodatkowo zachodzi implikacja: $M \otimes_R K \xrightarrow{id \otimes_R f} M \otimes_R L \xrightarrow{id \otimes_R g} M \otimes_R N$ jest dokładny dla $f \in {}_R\operatorname{Hom}(K,L)$, $g \in {}_R\operatorname{Hom}(L,N)$

$\implies K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N$ jest dokładny.

Udowodnij że każdy wolny moduł jest wiernie płaski.

(6) Oblicz wymiar przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^m \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ $2$