① Udowodnij że przestrzeń wektorowa z normą jest zawsze topologiczną przestrzenią wektorową względem topologii indukowanej przez normę.

② Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Udowodnij że normy

$$\|v\|_e := \sum_{i=1}^{\dim V} |\alpha_i| \ , \quad v =: \sum_{i=1}^{\dim V} \alpha_i e_i, \ \{e_i\}_i \text{ baza},$$

$$\|v\|_f := \sum_{i=1}^{\dim V} |\beta_i| \ , \quad v =: \sum_{i=1}^{\dim V} \beta_i f_i, \ \{f_i\}_i \text{ baza},$$

są równoważne.

③ Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ z normami $\| \ \|_1$ i $\| \ \|_2$. Udowodnij że jeśli $\| \ \|_1$ i $\| \ \|_2$ są równoważne, to V jest zupełna w metryce $\| \ \|_1$ $\iff$ jest zupełna w metryce $\| \ \|_2$.

T1

④ Udowodnij że każda skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$ jest przestrzenią Banacha.

⑤ Udowodnij że norma $V \xrightarrow{\|\ \|} \mathbb{R}$ jest zawsze funkcją ciągłą względem topologii $\|\ \|$ na V i Euklidesowej na $\mathbb{R}$.

⑥ Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $H\times H \xrightarrow{\langle\, |\, \rangle} \mathbb{C}$

Niech $B(H) := \left\{ T \in End(H) \,\middle|\, \sup_{0\neq v\in H} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} < \infty \right\}$.

Udowodnij że $\forall T \in B(H)\ \exists!\ T^* \in B(H)$

$\forall v, w \in H : \langle v | T^* w\rangle = \langle Tv | w\rangle$

Pokaż też że $\forall\, T, S \in B(H), \alpha \in \mathbb{C}$:

$(T^*)^* = T$, $(TS)^* = S^* T^*$, $(S+T)^* = S^* + T^*$,

$(\alpha T)^* = \bar{\alpha}\, T^*$.