A - algebra Banacha nad $\mathbb{C}$ z $1 \in A$.

Spektrum $a \in A$ to $Sp_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists (a-\lambda)^{-1} \in A\}$.

Promień spektralny a to $r(a) := \sup_{\lambda \in Sp_A(a)} |\lambda|$.

① ~~Ud~~ Udowodnij że $\forall a, b \in A$:

$$Sp(ab) \setminus \{0\} = Sp(ba) \setminus \{0\}.$$

② Udowodnij że $\|a\| < 1$

$$\Longrightarrow (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \in A.$$

③ Udowodnij że $r(a) \leq \|a\|$, $\forall a \in A$.

④ Niech $a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) =: A$.

Pokaż że $r(a) = 0$ i $\|a\| = 1$.

<u>Homomorfizm algebr</u> $A \xrightarrow{f} B$ to niezerowe odwzorowanie liniowe takie że $\forall a, a' \in A: f(aa') = f(a) f(a')$.

<u>Charakter</u> algebry A to homomorfizm algebr $A \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$.

(5) Udowodnij że $\forall$ charakteru $A \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$

$\|\tau\| \leq 1$ (w sensie normy odwzorowania liniowego pomiędzy przestrzeniami unormowanymi).

(6) Udowodnij że $\forall \exists a^{-1}$

$$\Rightarrow Sp_A(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} \in \mathbb{C} \mid \lambda \in Sp_A(a)\}$$

<u>Uwaga:</u> $\tau(1) = 0 \Rightarrow (\forall a \in A: \tau(a) = \tau(1 \cdot a) = \tau(1)\tau(a) = 0)$ więc $\tau(1) \neq 0$. Z drugiej strony, $\tau(1) = \tau(1 \cdot 1) = \tau(1)^2$. Zatem $\tau(1) = 1$. Ogólnie, dla $A \xrightarrow{f} B$, nie możemy wywnioskować że $f(1)^2 = f(1)$ i $f(1) \neq 0$ implikują $f(1) = 1$.