① Niech V będzie przestrzenią Banacha. Udowodnij że topologia WST na V^* jest topologią zbieżności punktowej.

② Niech A będzie C^*-algebrą z 1-a. Korzystając z twierdzenia $a=a^* \Rightarrow Sp_A(a) \subseteq \mathbb{R}$, udowodnij że

$$\forall a \in A, \varphi \in \chi(A) : \boxed{\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}}.$$

($\chi(A)$ to przestrzeń wszystkich charakterów na A.) Pokaż też że $\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a \in A$.

③ Niech $A \xrightarrow{f} B$ będzie homomorfizmem pomiędzy C^*-algebrami z 1-ą takim że $\forall a \in A : f(a^*) = f(a)^*$ oraz $f(1) = 1$. Korzystając z faktu $r(a) \leq \|a\|$, $\forall a \in A$, udowodnij że

$$\boxed{\forall a \in A : \|f(a)\| \leq \|a\|}.$$

Wywnioskuj stąd że homomorfizm algebr zachowujący $*$-ę i 1-ę jest automatycznie ciągły.

④ Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią zwartych przestrzeni Hausdorffa z odwzorowaniami ciągłymi jako morfizmami. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią przemiennych C^*-algebr z 1-ą z homomorfizmami algebr zachowującymi $*$-ę i 1-ę jako morfizmami. Korzystając z twierdzenia Gelfanda-Naimarka, udowodnij że przyporządkowania

$$Ob(\mathcal{A}) \ni X \longmapsto C(X) \in Ob(\mathcal{C})$$

$$Mor_{\mathcal{A}}(X,Y) \ni F \longmapsto F^* \in Mor_{\mathcal{C}}(C(Y), C(X))$$

$$F^*(f) := f \circ F$$

$$Ob(\mathcal{C}) \ni A \longmapsto \mathcal{X}(A) \in Ob(\mathcal{A})$$

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \longmapsto f^* \in Mor_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}(B), \mathcal{X}(A))$$

$$f^*(\varphi) := \varphi \circ f$$

definiują funktory kontrawariantne zadające $\boxed{\text{równoważność kategorii } \mathcal{A} \text{ i } \mathcal{C}^{op}}$.

(Dla dowolnej kategorii $\mathcal{D}$ definiujemy kategorię przeciwną $\mathcal{D}^{op}$ przez $Ob(\mathcal{D}^{op}) = Ob(\mathcal{D})$, $Mor_{\mathcal{D}^{op}}(A,B) = Mor_{\mathcal{D}}(B,A)$.)

⑤ Korzystając z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa dla zwartych przestrzeni Hausdorffa (każdy ciąg ma zbieżny podciąg), udowodnij że jeśli G jest monoidem zwartym Hausdorffa spełniającym obustronne prawo skracania
$$gh = gk \Rightarrow h = k, \quad hg = kg \Rightarrow h = k,$$
to jest też grupą zwartą Hausdorffa.
Pokaż też że prawa skracania są równoważne normowej gęstości w $C(G\times G)$ podzbiorów
$$\Big\{ \sum_{i\in I = \text{skończony zbiór}} (\Delta f_i)(1\otimes h_i) \Big\} \quad i \quad \Big\{ \sum_{i\in I = \text{skończony zbiór}} (h_i\otimes 1)(\Delta f_i) \Big\},$$
gdzie $\Delta : C(G) \to C(G\times G)$ jest pullbackiem działania grupowego $G\times G \to G$, oraz $\forall x,y\in G$:
$$(1\otimes h)(x,y) := h(y), \quad (h\otimes 1)(x,y) := h(x),$$
a $f_i, h_i \in C(G)$, $\forall\, i\in I$.

⑥ Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami Hausdorffa. Korzystając z twierdzenia Stonea-Weierstrassa, udowodnij że wzór

$$C(X) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} C(Y) \ni f_1 \otimes f_2 \longmapsto \big((x,y) \mapsto f_1(x) f_2(y)\big) \in C(X \times Y)$$

definiuje injekcję której obraz jest normowo gęsty w $C(X \times Y)$. Wywnioskuj stąd że $C(X \times Y)$ można traktować jako normowo uzupełniony produkt tensorowy $C(X) \bar{\otimes} C(Y)$. Zamieniając $C(G)$ na dowolną (niekoniecznie przemienną) C^*-algebrę z 1-ką, wywnioskuj stąd i z poprzednich zadań jak zdefiniować <u>kwantową grupę</u> zwartą Hausdorffa.