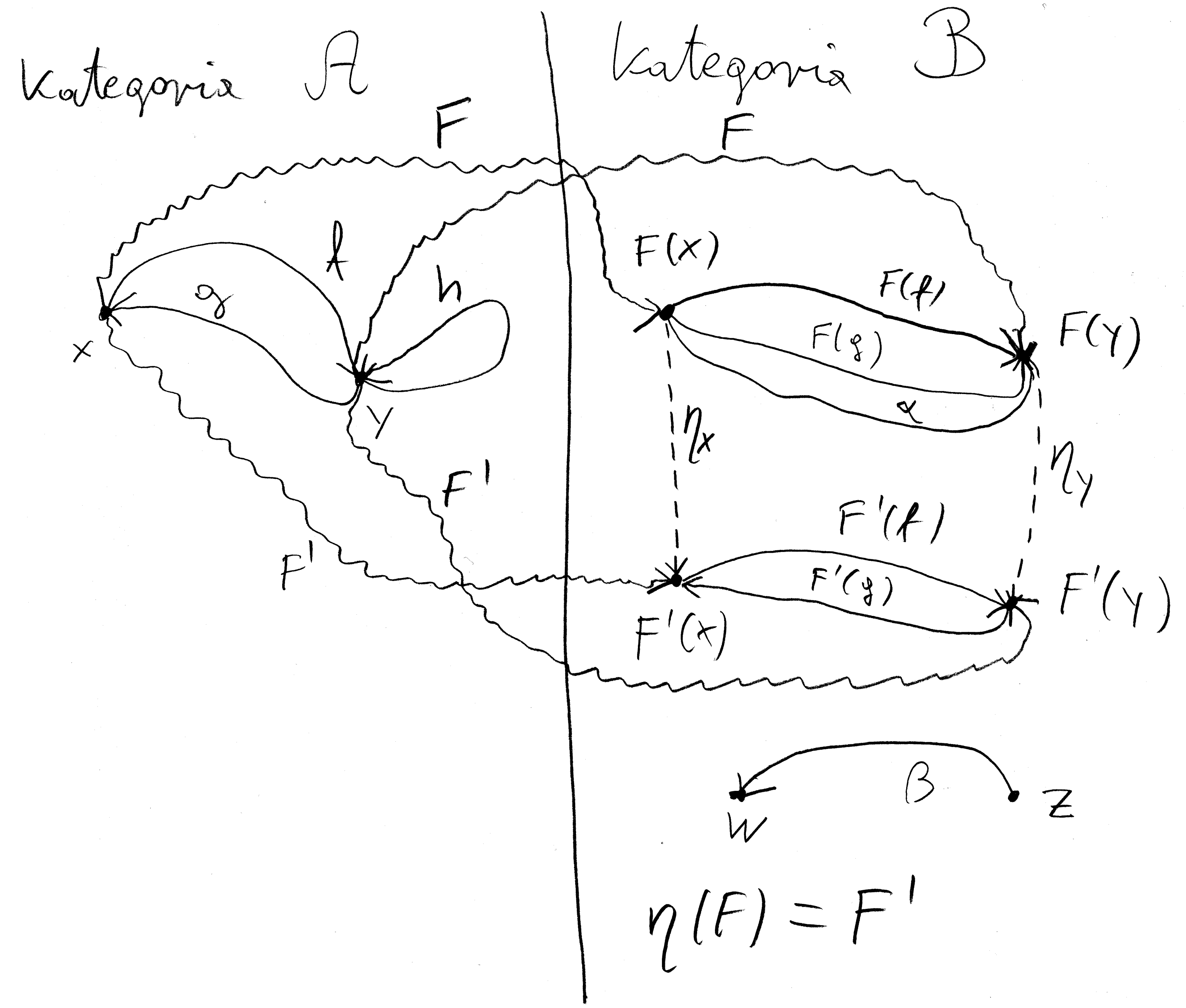
① RÓWNOWAŻNOŚĆ KATEGORII



$\eta(F) = F'$

Kropki tworzą klasę obiektów, strzałki wewnętrzne morfizmy, strzałki przez kreskę funktory, strzałki przerywane transformację naturalną między funktorami.

Paradoks Russella: Niech $\mathcal{C}$ będzie klasą wszystkich klas nie zawierających siebie. Czy $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$?

Kategoria $\mathcal{A}$ to para $(\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{A})$,

gdzie $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ jest klasą obiektów

(nie ma aksjomatu że istnieje klasa wszystkich podklas danej klasy), a

$\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$ jest klasą zbiorów morfizmów z obiektu A do obiektu B. Taki zbiór oznaczamy przez $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

Zakładamy przy tym aksjomaty:

i) $\forall\, A,B,C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A},\ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B),\ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B,C)$

$\exists!\ g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,C)$

ii) $\forall\, A,B,C,D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A},\ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B),\ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B,C),\ h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C,D)$

$$\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$$

iii) $\forall\, A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}\ \exists\, id_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,A)$:

$id_A \circ f = f,\ \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X,A),\ g \circ id_A = g,\ \forall g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,Y)$

Uwaga: id_A jest jedyny bo $id_A = id_A \circ id_A' = id_A'$

Morfizm $X \xrightarrow{f} Y$ nazywamy <u>izomorfizmem</u> jeśli $\exists\; Y \xrightarrow{\tilde{f}} X : \tilde{f} \circ f = id_X$ i $f \circ \tilde{f} = id_Y$.

Morfizm $\tilde{f}$ jest jedyny bo $\tilde{f} = id_X \circ \tilde{f} = \tilde{f}' \circ f \circ \tilde{f} = \tilde{f}' \circ id_Y = \tilde{f}'$.

<u>Kategoria zbiorów $\mathcal{S}$:</u>

Ob $\mathcal{S}$ = klasa wszystkich zbiorów

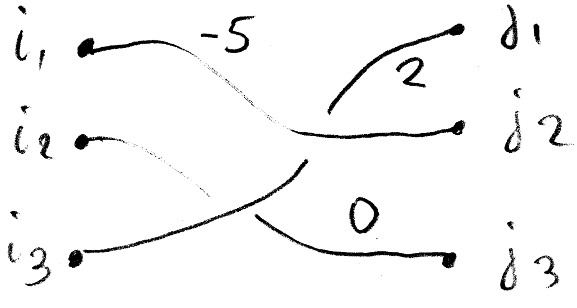
$Mor_{\mathcal{S}}(X, Y) = Map(X, Y)$ zbiór wszystkich odwzorowań.

<u>Kategoria wstążek $\mathcal{R}$:</u>

Ob $\mathcal{R}$ = zbiór wszystkich niepustych skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.

$Mor_{\mathcal{R}}(\{i_1, \dots, i_m\}, \{j_1, \dots, j_n\}) = \emptyset$ dla $m \neq n$

$Mor_{\mathcal{R}}(\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots j_n\})$ = zbiór wszystkich warkoczy o <u>n-wstążkach</u>:



Każda wstążka ma przypisaną liczbę $k \in \mathbb{Z}$ będącą liczbą jej skręceń o kąt $k\pi$.

Funktor kowariantny (kontrawariantny).

z kategorii $\mathcal{A}$ do kategorii $\mathcal{B}$ to przyporządkowanie $Ob\,\mathcal{A} \xrightarrow{F} Ob\,\mathcal{B}$,

$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \xrightarrow{F} Mor_{\mathcal{B}}(F(A),F(B))$ (kowariantny),

$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{B}}(F(B),F(A))$ (kontrawariantny)

takie że
$$\boxed{\begin{array}{ll} F(g\circ f) = F(g)\circ F(f) & (\text{ko}), \\ F(g\circ f) = F(f)\circ F(g) & (\text{kontra}) \end{array}}$$

$\forall A,B,C \in Ob\,\mathcal{A},\ f\in Mor_{\mathcal{A}}(A,B),\ g\in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$.

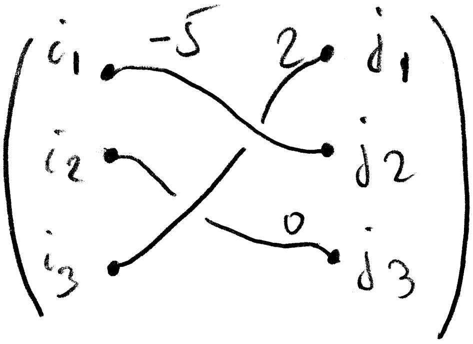
Przykłady: Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią zbiorów i $X_0 \in Ob\,\mathcal{S}$. Wtedy przyporządkowanie
$$Ob(\mathcal{S}) \ni X \longmapsto Map(X_0,X) \in Ob(\mathcal{S})$$

$\forall X,Y\in Ob\,\mathcal{S}:\ Map(X,Y)\ni f \longmapsto f_*\in Map(Map(X_0,X), Map(X_0,Y))$ (my)

$f_*(\varphi) := f\circ\varphi$ definiuje funktor kowariantny z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}$. Podobnie, przyporządkowanie $X\longmapsto Map(X,X_0)$, $f\longmapsto f^*$, $f^*(\varphi)=\varphi\circ f$, definiuje funktor kontrawariantny.

<u>Funktor zapominania $\mathcal{R} \xrightarrow{F} \mathcal{S}$</u>:

$$F(\{i_1, \dots, i_n\}) = \{i_1, \dots, i_n\},$$

F 

$=$

$$i_1 \longmapsto j_2$$
$$i_2 \longmapsto j_3$$
$$i_3 \longmapsto j_1.$$

<u>Naturalna transformacja η</u> funktora $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ do funktora $\mathcal{A} \xrightarrow{F'} \mathcal{B}$ to klasa morfizmów w $\mathcal{B}$ indeksowanych przez obiekty $\mathcal{A}$ $\left(\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}\ \exists!\ \eta_X \in \mathrm{Mor}(F(X), F'(X))\right)$ taka że wszystkie diagramy

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
F'(X) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(Y)
\end{tikzcd}$$

są przemienne.

Zakładamy tu że F i F' są obydwa kowariantne lub obydwa kontrawariantne.

Funktory $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ i $\mathcal{A} \xrightarrow{F'} \mathcal{B}$ są <u>izomorficzne</u> jeśli istnieje naturalna transformacja $\eta : F \mapsto F'$ taka że $\forall X \in \mathcal{A} : F(X) \xrightarrow{\eta_X} F'(X)$ jest izomorfizmem

Kategorie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są <u>równoważne</u> jeśli istnieją funktory $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ takie że $G \circ F$ jest izomorficzny z $id_{\mathcal{A}}$ i $F \circ G$ jest izomorficzny z $id_{\mathcal{B}}$.

Kategorie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są izomorficzne jeśli istnieją funktory $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ takie że $G \circ F = id_{\mathcal{A}}$ i $F \circ G = id_{\mathcal{B}}$.