② OD MONOIDÓW DO BIMODUŁÓW

Monoid to zbiór M z łącznym działaniem $M \times M \xrightarrow{+} M$ i *elementem neutralnym* działania: $\exists 0 \in M \ \forall m \in M: \ 0 + m = m = m + 0$. Przykład $(\mathbb{N}, +, 0)$ lub $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$.

Grupa to monoid G taki że $\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G: \ g g^{-1} = e = g^{-1} g$.

Grupę nazywamy *abelową* jeśli $\forall g, g' \in G: \ g g' = g' g$. Przykład: $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Pierścień to zbiór R z dwoma działaniami $R \times R \xrightarrow{+} R$, $R \times R \xrightarrow{\cdot} R$, takimi że $(R, +, 0)$ jest grupą abelową, $(R, \cdot, 1)$ jest monoidem, oraz $\forall x, y, z \in R$:

$$(x + y) \cdot z = xz + yz \quad i \quad x(y + z) = xy + xz.$$

Pierścień jest *przemienny* jeśli $\forall x, y \in R: xy = yx$.
Przykład: $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$.

Uwaga: Jeśli R jest pierścieniem takim że $0=1$, to $R=\{0\}$. Istotnie, $\forall r\in R$:

$$r = r\cdot 1 = r\cdot 0 = \cancel{r(r-r) = r^2-r^2 = 0} \; r\cdot 0 + r - r = r(0+1) - r = r - r = 0.$$

Ciało to pierścień przemienny k taki że $(k\setminus\{0\}, \cdot)$ jest grupą. Przykłady:

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Moduł nad pierścieniem R to grupa abelowa $(M,+)$ wyposażona w łączne (lewe lub prawe) działanie R na M ($R\times M \to M$ lub $M\times R\to M$) takie że:

1) $r(m+n) = rm + rn$, $\forall r\in R$, $m,n\in M$,

2) $(r+s)m = rm + sm$, $\forall r,s\in R$, $m\in M$,

3) $1m = m$. (Analogiczne wzory w przypadku prawego działania) Moduł z lewym (prawym) działaniem R nazywamy lewym (prawym) R-modułem.

Przykład: Dowolna grupa abelowa (np. $(\mathbb{Q},+)$) nad $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

<u>Przestrzeń wektorowa</u> to moduł nad <u>ciałem</u>. Przykład: $k^n := \underbrace{k \times \ldots \times k}_{n\text{-razy}}$.

<u>Bimoduł</u> nad pierścieniami L i R to lewy L-moduł M będący równocześnie prawym R-modułem i taki że

$$\boxed{(l\,m)r = l(m\,r)}, \quad \forall l \in L, m \in M, r \in R.$$

<u>Przykłady</u>: ① $L = M_m(\mathbb{Z})$, $M = M_{m\times n}(\mathbb{Z})$, $R = M_n(\mathbb{Z})$:

$$m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} l_{ij} \end{pmatrix}}_{m}\right. \quad m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} z_{kl} \end{pmatrix}}_{n}\right. \quad \left.\underbrace{\begin{pmatrix} r_{pq} \end{pmatrix}}_{n}\right\}n ,$$

$$\big((l\,z)r\big)_{kl} = \sum_{i=1}^{n} (lz)_{ki} r_{il} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} l_{kj} z_{ji}\Big) r_{il}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} l_{kj} z_{ji} r_{il} = \sum_{j=1}^{m} l_{kj} \Big(\sum_{i=1}^{n} z_{ji} r_{il}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} l_{kj} (zr)_{jl} = \big(l(zr)\big)_{kl}.$$

② Każdy moduł nad pierścieniem przemiennym (np. przestrzeń wektorowa) jest bimodułem: $mr := rm \Rightarrow (lm)r = r(lm)$
$= (rl)m = (lr)m = l(rm) = l(mr)$.

③ Każdy lewy R-moduł jest $(R, \mathbb{Z})$-bimodułem: $(rv)n =$
$= \underbrace{rv + \ldots + rv}_{n\text{-razy}} = r(\underbrace{v + \ldots + v}_{n\text{-razy}}) = r(vn)$.

Podobnie dla $n < 0$. Analogicznie, każdy prawy R-moduł jest $(\mathbb{Z}, R)$-bimodułem.

<u>Podbimodułem</u> (L, R)-bimodułu M nazywamy taki podzbiór $N \subseteq M$ że
1) $n, n' \in N \Rightarrow n + n' \in N$,
2) $l \in L, n \in N, r \in R \Rightarrow lnr \in N$.

Przykład: $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

__Ilorazem__ (L,R)-bimodułu M przez jego podbimoduł N nazywamy zbiór klas równoważności M/N względem relacji $\boxed{m \underset{N}{\sim} m' \Leftrightarrow m-m' \in N}$ wyposażony w indukowaną strukturę bimodułu:

1) $[m]_N + [m']_N := [m+m']_N$,
2) $l[m]_N r := [lmr]_N$.

Przykład: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$.

__Bazą__ lewego R-modułu M nazywamy podzbiór $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq M$ taki, że:

1) $\forall m\in M \ \exists J\subseteq I, |J|<\infty, \{\alpha_i\}_{i\in J}\subseteq R: m=\sum_{i\in J}\alpha_i e_i$,

2) $J\subseteq I, |J|<\infty, \sum_{i\in J}\alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i\in J$.

Jeśli moduł posiada bazę, to każdy jego element daje się jednoznacznie przedstawić jako skończoną liniową kombinację elementów bazy.

<u>Moduł wolny</u> to moduł który posiada bazę.

<u>Twierdzenie</u>: Każda przestrzeń wektorowa posiada bazę.

<u>Przykłady</u>: ① Bazą k^n jest $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$,

$$e_i := (0,\dots,\overset{i\text{-te miejsce}}{1},\dots,0).$$

② $\mathbb{R}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Q}$.

<u>Kontrprzykład</u>: Moduł pól wektorowych stycznych do S^2 nie ma bazy nad przemiennym pierścieniem funkcji na S^2.

<u>Twierdzenie</u>: Wszystkie bazy dowolnej przestrzeni wektorowej są równoliczne.

<u>Wymiarem</u> przestrzeni wektorowej nazywamy ilość elementów jej bazy.