③ FUNKTOR TENSOROWANIA BIMODUŁÓW

Niech M i N będą odpowiednio (A,B) i (B,C)-bimodułami. Przez $\mathbb{Z}[M\times N]$ oznaczymy wolny $\mathbb{Z}$-moduł generowany przez $M\times N$, tzn.

$$\mathbb{Z}[M\times N] := \{ f \in Map(M\times N, \mathbb{Z}) \mid |supp\, f| < \infty \}.$$

Tutaj $supp(X \xrightarrow{f} \mathbb{Z}) := \{ x\in X \mid f(x) \neq 0 \}$ jest nośnikiem odwzorowania f, a struktura $\mathbb{Z}$-modułu jest dana przez $(f+g)(m,n) = f(m,n) + g(m,n)$.

Odwzorowania zdefiniowane przez

$$\delta_{(m,n)}(k,l) := \begin{cases} 1 & \text{dla } m=k \text{ i } n=l \\ 0 & \text{dla innych } (k,l) \end{cases}$$

tworzą bazę $\mathbb{Z}[M\times N]$.

Weźmy teraz $\mathbb{Z}$-podmoduł $\mathbb{Z}_B[M,N]$ generowany przez

1) $\delta_{(m+m',n)} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m',n)}$, $m,m' \in M$, $n \in N$,

2) $\delta_{(m,n+n')} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m,n')}$, $m \in M$, $n,n' \in N$,

3) $\delta_{(mb,n)} - \delta_{(m,bn)}$, $m \in M$, $n \in N$, $b \in B$.

Innymi słowy, $\mathbb{Z}_B[M,N]$ jest $\mathbb{Z}$-modułem

<u>wszystkich skończonych kombinacji</u>

<u>liniowych</u> $\sum\limits_{\substack{i \in I \\ |I| < \infty}} \mu_i x_i$, gdzie $\mu_i \in \mathbb{Z}$,

a x_i jest postaci 1), 2) lub 3).

Zauważmy że $\mathbb{Z}[M \times N]$ i $\mathbb{Z}_B[M \times N]$ mają naturalną strukturę (A, C)-bimodułów zdefiniowaną przez

$$\boxed{b\,\delta_{(m,n)}\,c := \delta_{(bm, nc)}}.$$

Produktem tensorowym (A, B)-bimodułu M z (B, C)-bimodułem N nazywamy (A, C)-bimoduł ilorazowy

$$\boxed{M \otimes_B N := \frac{\mathbb{Z}[M \times N]}{\mathbb{Z}_B[M, N]}}.$$

Niech ${}_B\mathcal{M}_C$ będzie kategorią (B, C)-bimodułów, tzn. $Ob({}_B\mathcal{M}_C)$ to klasa (B, C)-bimodułów, a $Mor_{{}_B\mathcal{M}_C}(N, N') = {}_B Hom_C(N, N') :=$

$$:= \left\{ f \in Map(N, N') \;\middle|\; \begin{array}{l} f(n+k) = f(n) + f(k), \\ f(bnc) = b f(n) c, \\ \forall n, k \in N,\ b \in B,\ c \in C \end{array} \right\}$$

Każdy (A, B)-bimoduł M definiuje <u>funktor</u> z kategorii ${}_B\mathcal{M}_C$ do ${}_A\mathcal{M}_C$:

$$N \longmapsto M \underset{B}{\otimes} N,$$

$${}_B\mathrm{Hom}_C(N, N') \ni f \longmapsto id \underset{B}{\otimes} f \in {}_A\mathrm{Hom}_C(M \underset{B}{\otimes} N, M \underset{B}{\otimes} N'),$$

$$(id \underset{B}{\otimes} f)(m \otimes n) := m \otimes f(n).$$

Musimy sprawdzić że odwzorowanie $id \underset{B}{\otimes} f$:

1) jest dobrze zdefiniowane,
2) jest homomorfizmem (A, C)-bimodułów,
3) spełnia $id \underset{B}{\otimes} (f \circ g) = (id \underset{B}{\otimes} f) \circ (id \underset{B}{\otimes} g)$.

Ad 1): $\mathbb{Z}[M\times N] \xrightarrow{id\times f} \mathbb{Z}[M\times N']$,

$$\delta_{(m,n)} \longmapsto \delta_{(m,f(n))}$$

$$(id\times f)\left(\delta_{(m+m',n)} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m',n)}\right) = \delta_{(m+m',f(n))} - \delta_{(m,f(n))} - \delta_{(m',f(n))}$$

$$(id\times f)\left(\delta_{(m,n+n')} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m,n')}\right) = \delta_{(m,f(n)+f(n'))} - \delta_{(m,f(n))} - \delta_{(m,f(n'))}$$

$$(id\times f)\left(\delta_{(mb,n)} - \delta_{(m,bn)}\right) = \delta_{(mb,f(n))} - \delta_{(m,bf(n))}.$$

Zatem $(id\times f)(\mathbb{Z}_B[M\times N]) \subseteq \mathbb{Z}_B[M\times N']$

i odwzorowanie indukowane

$$\frac{\mathbb{Z}[M\times N]}{\mathbb{Z}_B[M\times N]} \xrightarrow{id\otimes_B f} \frac{\mathbb{Z}[M\times N']}{\mathbb{Z}_B[M\times N']},$$

$$(id\otimes_B f)(m\otimes n) = (id\times f)[\delta_{(m,n)}] = [\delta_{(m,f(n))}] = m\otimes f(n),$$

istnieje.

Ad 2): $(id \otimes_B f)(m \otimes n + p \otimes q) = (id \times f)[\delta_{(m,n)} + \delta_{(p,q)}]$

$$= [\delta_{(m, f(n))}]' + [\delta_{(p, f(q))}]' = m \otimes f(n) + p \otimes f(q)$$

$$= (id \otimes_B f)(m \otimes n) + (id \otimes_B f)(p \otimes q),$$

$$(id \otimes_B f)(am \otimes nc) = (id \times f)[\delta_{(am, nc)}] =$$

$$= [\delta_{(am, f(n)c)}]' = [a\, \delta_{(m, f(n))}\, c]' =$$

$$a\, [\delta_{(m, f(n))}]'\, c = am \otimes_B f(n) c.$$

Ad 3): $((id \otimes_B f) \circ (id \otimes_B g))(m \otimes n) =$

$$= (id \otimes_B f)((id \otimes_B g)(m \otimes n)) = (id \otimes_B f)(m \otimes g(n))$$

$$= m \otimes f(g(n)) = m \otimes (f \circ g)(n) = (id \otimes_B (f \circ g))(m \otimes n)$$

Analogicznie, każdy (B, C)-bimoduł N definiuje funktor z ${}_A\mathcal{M}_B$ do ${}_A\mathcal{M}_C$.