④ TOPOLOGICZNE PRZESTRZENIE WEKTOROWE

Monoid topologiczny $(M, +, 0, \mathcal{O}(M))$ to monoid wyposażony w topologię $\mathcal{O}(M)$ taką że $M \times M \xrightarrow{+}$ jest ciągłe w topologii produktowej na $M \times M$.

Przykład: $\mathbb{R}_{\geq 0}$ z topologią Euklidesową.

Grupa topologiczna $(G, +, 0, \mathcal{O}(G))$ to grupa wyposażona w topologię $\mathcal{O}(G)$ taką że G jest monoidem topologicznym i odwzorowanie $G \ni g \longmapsto g^{-1} \in G$ jest ciągłe.

Przykład: $\mathbb{C}^{\times}$ z topologią Euklidesową.

Pierścień topologiczny $(R, +, 0, \cdot, 1, \mathcal{O}(R))$ to pierścień taki że $(R, +, 0, \mathcal{O}(R))$ jest grupą topologiczną a $(R, \cdot, 1, \mathcal{O}(R))$ jest monoidem topologicznym. Przykład: $M_n(\mathbb{R})$ z topologią Euklidesową.

Ciało topologiczne $(k, +, 0, \cdot, 1, \mathcal{O}(k))$ to ciało które jest pierścieniem topologicznym takim że odwzorowanie $k \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in k \setminus \{0\}$ jest ciągłe. Przykład: $\mathbb{C}$ z topologią Euklidesową.

Topologiczna przestrzeń wektorowa $(V, +, 0, \mathcal{O}(V), \cdot, k, \mathcal{O}(k))$ to przestrzeń wektorowa nad topologicznym ciałem taka że działania $V \times V \xrightarrow{+} V$ i $k \times V \xrightarrow{\cdot} V$ są ciągłe w topologii produktowej.

Uwaga: $(V, +, 0, \mathcal{O}(V))$ jest automatycznie grupą topologiczną bo odwzorowanie $V \ni v \mapsto -v \in V$ jest złożeniem odwzorowań ciągłych: $V \to k \times V \to V$,

$v \mapsto (-1, v) \mapsto (-1)v = (-1)v + v - v = (1-1)v - v$
$= 0v - v = -v$. Mamy $0v = 0$ bo
$0v + v = (0+1)v = v \Rightarrow 0v = 0$.

Przestrzeń Euklidesowa k^n jest standardowym przykładem topologicznej przestrzeni wektorowej. Każde odwzorowanie liniowe $f \in Hom_k(k^m, k^n)$ jest ciągłe. Wszystko to wynika z ogólnego faktu:

Twierdzenie: Niech X, Y, Z będą dowolnymi przestrzeniami topologicznymi. Niech $p_Y : Y \times Z \to Y$ i $p_Z : Y \times Z \to Z$ będą kanonicznymi projekcjami. Wówczas odwzorowanie $X \xrightarrow{f} Y \times Z$ jest ciągłe w topologii produktowej $\iff$ odwzorowania $p_Y \circ f$ i $p_Z \circ f$ są ciągłe.

Dowód: Zauważmy najpierw że p_Y i p_Z są ciągłe bo $U \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow p_Y^{-1}(U) = U \times Z \in \mathcal{O}(Y \times Z)$ i $V \in \mathcal{O}(Z) \Rightarrow p_Z^{-1}(V) = Y \times V \in \mathcal{O}(Y \times Z)$. Z drugiej strony, każdy zbiór otwarty w $Y \times Z$

jest postaci $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \times V_\alpha$ gdzie

$U_\alpha \in \mathcal{O}(Y)$ i $V_\alpha \in \mathcal{O}(Z)$. Przeciwobraz

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \times V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha \times V_\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha \times Z \cap Y \times V_\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha \times Z) \cap f^{-1}(Y \times V_\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(P_Y^{-1}(U_\alpha)) \cap f^{-1}(P_Z^{-1}(V_\alpha))$$

$$= \bigcup_{\alpha\in I} (P_Y \circ f)^{-1}(U_\alpha) \cap (P_Z \circ f)^{-1}(V_\alpha)$$

$\in \mathcal{O}(X)$ z ciągłości $P_Y \circ f$ i $P_Z \circ f$. $\square$

Przez indukcję otrzymujemy:

Wniosek: Odwzorowanie $X \xrightarrow{f} \prod_{i=1}^{n} Y_i$ jest ciągłe w topologii produktowej $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$: $p_i \circ f$ jest ciągłe, gdzie $\prod_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow{p_i} Y_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, to kanoniczne projekcje.

Kolejny pożyteczny fakt to:

Wniosek: Niech $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, będą odwzorowaniami ciągłymi. Wtedy odwzorowanie $\prod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{(f_1, \dots, f_n)} \prod_{i=1}^{n} Y_i$ jest ciągłe w topologii produktowej.

Dowód: Niech $\prod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p_j^X} X_j$ i $\prod_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{p_j^Y} Y_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, to kanoniczne projekcje. Wtedy $\forall j \in \{1, \dots, n\}$:

$p_j^Z \circ (f_1, \dots, f_n) = f_j \circ p_j^X$ jest ciągłe i możemy zastosować poprzedni wniosek. $\square$

Niech $\dim_k V = n < \infty$. Wtedy każda baza $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ przestrzeni V zadaje bijekcję $k^n \xrightarrow{e} V$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Można sprawdzić że z topologią zadaną przez e, tzn. $A \in \mathcal{O}(V) \Leftrightarrow e^{-1}(A) \in \mathcal{O}(k^n)$, V jest topologiczną przestrzenią wektorową. Topologia V nie zależy od wyboru bazy bo dla każdych baz $\{e_i\}_i$ i $\{f_i\}_i$ istnieje izomorfizm $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(k^n, k^n)$ taki że $f = e \circ \alpha$, a każdy taki izomorfizm jest homeomorfizmem. Na skończenie wymiarowych przestrzeniach wektorowych $\exists!$ topologia zgodna z topologią ciała.