⑥ ALGEBRY BANACHA

Algebra nad ciałem k to przestrzeń wektorowa nad k wyposażona w łączne mnożenie $A \times A \xrightarrow{\cdot} A$ biliniowe nad k. Mnożenie zadaje k-liniowe odwzorowanie $A \otimes_k A \to A$.

Jeśli mnożenie posiada element neutralny $1 \in A$ (algebra z jedynką), to algebra jest pierścieniem wyposażonym w strukturę przestrzeni wektorowej.

Przykłady: ① $A = \mathrm{Map}(X, k)$,

$(f \cdot g)(x) := f(x) g(x)$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$,

$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

② $A = M_n(k)$, $(ab)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$,

$(a+b)_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$, $(\alpha a)_{ij} := \alpha a_{ij}$.

Algebra topologiczna to algebra wyposażona w topologię taką że jest ona topologiczną przestrzenią wektorową z mnożeniem ciągłym w topologii produktowej. (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$)

Algebra unormowana A to algebra wyposażona w normę $A \xrightarrow{\|\ \|} \mathbb{R}$ czyniącą ją unormowaną przestrzenią wektorową oraz spełniającą warunek:

$$\boxed{\forall a,b \in A : \quad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|}$$

Algebra unormowana jest automatycznie algebrą topologiczną względem topologii normowej:

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab\|$$
$$\leq \|a_n(b_n - b)\| + \|(a_n - a) b\| \leq \|a_n\| \, \|b_n - b\|$$
$$+ \|a_n - a\| \, \|b\|$$ pociąga za sobą implikację $(a_n, b_n) \to (a,b) \Rightarrow a_n b_n \to ab.$

Przykład: Niech V będzie unormowaną przestrzenią wektorową. Przestrzeń wektorowa ($\mathrm{End}(V)$) wszystkich liniowych odwzorowań z V w V (endomorfizmów) jest algebrą ze względu na składanie odwzorowań. Element $T \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy ograniczonym jeśli

$$\boxed{\|T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|Tv\| < \infty}.$$

Zbiór elementów ograniczonych $B(V)$ tworzy podalgebrę w $\mathrm{End}(V)$:

1)
$$\|S \circ T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|S(Tv)\| \leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1 \\ Tv \neq 0}} \frac{\|S(Tv)\|}{\|Tv\|} \|Tv\|$$

$$\leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1 \\ Tv \neq 0}} \frac{\|S(Tv)\|}{\|Tv\|} \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1 \\ Tv \neq 0}} \|Tv\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1 \\ Tv \neq 0}} \left\|S\left(\frac{Tv}{\|Tv\|}\right)\right\| \cdot \|T\|$$

$$\leq \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\|=1}} \|Su\| \cdot \|T\| = \|S\| \, \|T\| < \infty,$$

② $\|S+T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|Sv + Tv\| \leq$

$\leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \left(\|Sv\| + \|Tv\| \right) \leq \|S\| + \|T\| < \infty,$

③ $\|\alpha T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|\alpha (Tv)\| = |\alpha| \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|Tv\|$

$= |\alpha| \, \|T\| < \infty.$

Elementy $B(V)$ nazywamy <u>operatorami</u> na V, a $B(V)$ algebrą operatorów.
①, ② i ③ razem z faktem ④

$0 = \|T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \Rightarrow \forall v \in V: \|Tv\| = 0$

$\Rightarrow T = 0$

udowadniają że $B(V)$ jest algebrą unormowaną.

Algebra Banacha to algebra unormowana zupełna względem metryki zadanej przez swoją normę.

Twierdzenie: Niech V będzie przestrzenią Banacha. Wówczas $B(V)$ jest algebrą Banacha.

Dowód: Niech $\mathbb{N} \ni n \longmapsto T_n \in B(V)$ będzie ciągiem Cauchy'ego, a $\{e_i\}_i$ bazą unormowaną V, tzn. $\|e_i\| = 1$, $\forall i$. Wtedy $\|T_m e_i - T_n e_i\| \leq \sup_{\|v\|=1} \|(T_m - T_n)v\| = \|T_m - T_n\|$. Zatem $(T_n e_i)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z zupełności V wynika że $\exists \lim_{n\to\infty} T_n e_i$. Niech $v =: \sum_i v_i e_i$. Wzór $Tv := \sum_i v^i \lim_{n\to\infty} T_n e_i$ definiuje endomorfizm V. Jest on ograniczony bowiem

$$\sup_{\|v\|=1} \|Tv\| = \sup_{\|v\|=1} \|\lim_{n\to\infty} T_n v\| =$$

$$= \sup_{\|v\|=1} \lim_{n\to\infty} \|T_n v\| \leq \sup_{\|v\|=1} \lim_{n\to\infty} \|T_n\|$$

$= \lim_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$. Ta granica istnieje bo $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego $\left(\big| \|T_m\| - \|T_n\| \big| \leq \|T_m - T_n\| \right)$ a $\mathbb{R}$ jest zupełne. Teraz wystarczy pokazać normową zbieżność $T_n \to T$. Niech $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \; \forall m,n \geq N : \sup_{\|v\|=1} \|T_m v - T_n v\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zatem $\forall v \in \{u \in V \mid \|u\| = 1\} : \lim_{m\to\infty} \|T_m v - T_n v\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Stąd $\sup_{\|v\|=1} \|Tv - T_n v\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$.

To oznacza że $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. $\square$

<u>Wniosek</u>: $M_n(\mathbb{C})$ jest algebrą Banacha.