⑦ TRANSFORMATA GELFANDA JAKO FUNKTOR MONOIDALNY Z KATEGORII PRZESTRZENI DO C^*-ALGEBR

Ⓐ kategorie:

1) równoważność
2) monoidalność

Ⓑ algebra

1) bimoduły
2) produkty tensorowe
3) algebry endomorfizmów

Ⓒ topologia + analiza

1) ciągłość
2) norma
3) zupełność

bimoduły nad $\mathbb{C}$ + norma + zupełność ⇝ przestrzenie Banacha i Hilberta

endomorfizmy + norma ⇝ algebry operatorów (Banacha i C^*)

produkt tensorowy + zupełność ⇝ struktura monoidalna

monoidalna kategoria zwartych przestrzeni Hausdorffa z produktem kartezjańskim i odwzorowaniami ciągłymi $\xrightarrow[\text{zadaje równoważność (monoidalnych?) kategorii}]{\text{transformata Gelfanda}}$ monoidalna kategoria przemiennych C^*-algebr z 1-ą z zupełnym produktem tensorowym i homomorfizmami algebr zachowującymi * i 1.

Niech $\mathcal{X}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} \mid \varphi$ jest homomorfizmem algebr$\}$ oznacza zbiór wszystkich charakterów algebry A. Załóżmy że A jest algebrą Banacha z 1-ą.

$\varphi \in \mathcal{X}(A) \Rightarrow \|\varphi\| \leq 1 \Rightarrow \varphi \in A^* := \{$ciągłe funkcjonały liniowe na $A\}$.

Dla przestrzeni Banacha V, topologia WST na V^* to najsłabsza topologia na V^* w której wszystkie odwzorowania ewaluujące $V^* \ni \varphi \xmapsto{ev_v} \varphi(v) \in \mathbb{C}$, $v \in V$, są ciągłe: zbiory otwarte są generowane przez zbiory $ev_v^{-1}(U)$, $v \in V$, $U \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Jest to topologia zbieżności punktowej: $\varphi_\alpha \to \varphi \Leftrightarrow \forall v \in V: \varphi_\alpha(v) \to \varphi(v)$.

Twierdzenie: Jeśli A jest przemienną algebrą Banacha z 1-ą, to $\mathcal{X}(A)$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa w topologii WST.

Dowód: Twierdzenie Banacha-Alaoglu o zwartości kuli jednostkowej w topologii WST. $\square$

Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z 1-ą. <u>Transformata Gelfanda</u> to odwzorowanie

$$\boxed{A \ni a \xmapsto{ev} ev_a \in C(\mathcal{X}(A))},$$

gdzie $C(\mathcal{X}(A))$ oznacza algebrę wszystkich funkcji ciągłych $\mathcal{X}(A) \to \mathbb{C}$ ze względu na topologię WST (ev_a jest automatycznie funkcją ciągłą). Dla dowolnej zwartej przestrzeni Hausdorffa X, na algebrze $C(X)$ możemy zdefiniować normę $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ czyniącą z $C(X)$ przemienną algebrą Banacha z 1-ą.

<u>Twierdzenie Gelfanda</u>: Transformata Gelfanda jest homomorfizmem algebr spełniającym:

1) $\|ev_a\| = r(a) \leq \|a\|$, $\forall a \in A$,
2) $Sp_A(a) = ev_a(\mathcal{X}(A))$, $\forall a \in A$, 3) $ev_1 = 1$.

C^*-algebra to algebra Banacha nad $\mathbb{C}$ wyposażona w $A \xrightarrow{*} A$ spełniające

1) $(a+b)^* = a^* + b^*$, $\forall a, b \in A$,

2) $(\alpha a)^* = \bar{\alpha} a^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}, a \in A$,

3) $(ab)^* = b^* a^*$, $\forall a, b \in A$,

4) $(a^*)^* = a$, $\forall a \in A$,

5) $\boxed{\| a a^* \| = \|a\|^2}$, $\forall a \in A$.

Przykład: Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Algebra Banacha $C(X)$ z inwolucją $f^*(x) := \overline{f(x)}$, $\forall x \in X$, jest przemienną C^*-algebrą z 1-ą.

Twierdzenie: Algebra Banacha $B(H)$ wszystkich ograniczonych operatorów na przestrzeni Hilberta z inwolucją zdefiniowaną przez $\langle x \mid a^* y \rangle = \langle a x \mid y \rangle$, $\forall x, y \in H, a \in B(H)$, jest C^*-algebrą z 1-ą.

Twierdzenie Gelfanda-Naimarka:

① Dla każdej przemiennej C^*-algebry z 1-ą transformata Gelfanda jest izomorfizmem algebr zachowującym 1, * i $\| \|$.

② Dla każdej C^*-algebry A istnieje przestrzeń Hilberta H_A taka że A jest izomorficzna z podalgebrą $B(H_A)$.

Dowód: ① opiera się na twierdzeniu Gelfanda o transformacie i twierdzeniu Stone'a-Weierstrass'a o gęstości. ② opiera się na GNS-konstrukcji przestrzeni Hilberta H_A. □

Kategoria produktowa $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ to kategoria której obiektami są pary (A, B), $A \in Ob(\mathcal{A})$, $B \in Ob(\mathcal{B})$, morfizmami z (A_1, B_1) do (A_2, B_2) są pary morfizmów (f, g), $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$, $g \in Mor_{\mathcal{B}}(B_1, B_2)$, złożenie morfizmów dane jest przez $(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) = (f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2)$ oraz $id_{(A,B)} = (id_A, id_B)$.

Struktura monoidalna na kategorii $\mathcal{A}$ to funktor $\boxtimes$ z kategorii produktowej $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}$, obiekt $e\in Ob(\mathcal{A})$, oraz izomorfizmy funktorów $\boxtimes\circ(id\times\boxtimes)\xrightarrow{\alpha}\boxtimes\circ(\boxtimes\times id)$, $e\boxtimes\xrightarrow{\lambda} id$, $\boxtimes e\xrightarrow{\varrho} id$, takie że spełniony jest

$$\boxed{\underline{\text{warunek pentagonalny}}\ \alpha_{a\boxtimes b,c,d}\circ\alpha_{a,b,c\boxtimes d} = (\alpha_{a,b,c}\boxtimes id_d)\circ\alpha_{a,b\boxtimes c,d}\circ(id_a\boxtimes\alpha_{b,c,d})},$$

$\forall a,b,c,d\in Ob(\mathcal{A})$.

Przykłady: ① składanie endomorfizmów: $\boxtimes=\circ$, $e=id$, ② produkt kartezjański: $\boxtimes=\times$, $e=\{*\}$, ③ produkt tensorowy bimodułów: $\boxtimes=\underset{R}{\otimes}$, $e=R$, ④ uzupełniony produkt tensorowy przestrzeni Hilberta: $H_1\boxtimes H_2=\overline{H_1\underset{\mathbb{C}}{\otimes}H_2}^{\langle|\rangle_\otimes}:=$ metryczne uzupełnienie $H_1\underset{\mathbb{C}}{\otimes}H_2$ względem jedynego iloczynu skalarnego $\langle|\rangle_\otimes$ spełniającego $\langle x_1\otimes x_2|y_1\otimes y_2\rangle_\otimes=\langle x_1,y_1\rangle_1\langle x_2,y_2\rangle_2$, $\forall x_1,y_1\in H_1, x_2,y_2\in H_2$, $e=\mathbb{C}$, ⑤ przestrzenny produkt tensorowy C^*-algebr: $A_1\boxtimes A_2=\overline{A_1\underset{\mathbb{C}}{\otimes}A_2}^{B(H_1\bar{\otimes}H_2)}$, $e=\mathbb{C}$.

Funktor monoidalny z $(\mathcal{A}_1,\boxtimes_1,e_1,\alpha_1,\lambda_1,\varrho_1)$ do $(\mathcal{A}_2,\boxtimes_2,e_2,\alpha_2,\lambda_2,\varrho_2)$ to funktor $\mathcal{A}_1\xrightarrow{F}\mathcal{A}_2$ wraz z naturalną transformacją $\boxtimes\circ(F\times F)\xrightarrow{F_2}F\circ\boxtimes$ oraz morfizmem $e_2\xrightarrow{F_0}F(e_1)$ spełniającymi 3 warunki ze stron 255-256 w "Categories for the Working Mathematician".