# KATEGORIA ZWARTYCH PRZESTRZENI HAUSDORFFA

1. Udowodnij że Twierdzenie Borsuka-Ulama równoważne jest następującemu:

$$\boxed{\exists f \in C(S^m, S^n) : f \circ A_m = A_n \circ f \iff m \leq n}$$

$A_k$ oznacza tu antypodalny automorfizm sfery $S^k$: $A_k(x_1, \dots, x_{k+1}) := (-x_1, \dots, -x_{k+1})$ gdzie iksy to współrzędne Kartezjańskie sfery zadanej równaniem $x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1$.

2. Topologia produktowa zdefiniowana jest jak następuje. Podzbiór $U$ produktu $\prod_{i \in I} X_i$ jest otwarty jeśli $\forall i \in I : pr_i(U)$ jest podzbiorem otwartym $X_i$ oraz $pr_i(U) \neq X_i$ tylko dla skończonej ilości

indeksów $i \in I$. Tutaj $pr_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ oznacza kanoniczną projekcję na $i$-ty składnik produktu. Udowodnij że odwzorowanie

$$f : \prod_{i\in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \{-1,1\} \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i+1}{3^i} \in \mathbb{R}$$

jest injektywne, ciągłe w topologii produktowej, oraz że jego obrazem jest zbiór Cantora.

3 Udowodnij że domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty i zwarty podzbiór przestrzeni Hausdorffa jest domknięty.

4 Udowodnij że jeśli $X \xrightarrow{f} Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, to zwartość $K \subseteq X$ implikuje zwartość $f(K) \subseteq Y$. Pokaż też że jeśli $X$ jest zwarty, $Y$ jest Hausdorffa i $f$ jest bijekcją, to $f$ jest homeomorfizmem.

⑤ Udowodnij że przestrzeń $X$ jest zwarta $\iff$ dla każdej rodziny $\{C_i\}_{i \in I}$ zbiorów domkniętych zachodzi $\boxed{\left(\forall \text{ skończony } J \subseteq I : \bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset\right) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset}$.

⑥ Domknięcie $\bar{A}$ zbioru $A$ to $\boxed{\{x \in X \mid x \in U \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\}}$.

Udowodnij że odwzorowanie $X \xrightarrow{f} Y$ jest ciągłe $\iff$

$$\forall A \subseteq X : f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$