TOPOLOGICZNE PRZESTRZENIE WEKTOROWE I ALGEBRY

① Niech R będzie pierścieniem, $r \in R$. Udowodnij że $(\exists!\, s \in R : sr = 1) \Rightarrow rs = 1$.

② Udowodnij że $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}$ jest przestrzenią unormowaną ze względu na normę euklidesową $\|(x_0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots)\| := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2}$, ale <u>nie</u> jest przestrzenią Banacha.

③ Na $\ell^2 := \left\{ \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty \right\}$, z normą $\|\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_2 := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2}$ skonstruuj iloczyn skalarny czyniący z $(\ell^2, \| \ \|_2)$ przestrzeń Hilberta.

(4) Niech $(V, \| \ \|)$ będzie przestrzenią wektorową unormowaną nad $\mathbb{C}$. Udowodnij że istnieje iloczyn skalarny $\langle \ | \ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ taki że $\forall v \in V: \langle v | v \rangle = \|v\|^2$ wtedy i tylko wtedy gdy spełnione jest prawo równoległoboku:

$$\boxed{\forall x, y \in V: \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}.$$

Pokaż że taki iloczyn skalarny wyrażony jest wzorem:

$$\forall x, y \in V: \langle x | y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|ix-y\|^2\right).$$