

ALGEBRY

OPERATORÓW

① Niech V będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{C} z iloczynem skalarnym. Udowodnij nierówność:

$$\forall x, y \in V : \langle x | y \rangle \langle y | x \rangle \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$$

Kiedy ta nierówność jest równością?

② Niech H^* będzie przestrzenią wszystkich ciągłych funkcjonałów na przestrzeni Hilberta H . Udowodnij że

$$\forall \varphi \in H^* \exists ! v_\varphi \in H \forall v \in H : \varphi(v) = \langle v_\varphi | v \rangle$$

Podaj przykład nieciągłego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta.

③ Niech A będzie algebra Banacha z jedynką. Udowodnij że

$$\|a\| < 1 \Rightarrow (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$