KATEGORIA ZWARTYCH PRZESTRZENI HAUSDORFFA

1

1 TOPOLOGIA I CIĄGŁOŚĆ

- Topologia pozwala kontrolować procesy nieskończone (pojęcie granicy). Weźmy np. zbiór A wszystkich liczb postaci $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$.
$$\exists!\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, \mathcal{O}(\mathbb{R}) \ni U \ni x : A \cap U \neq \emptyset .$$
Mamy $x = 1 =: \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$. Rozwiązuje to paradoks Zenona z Elei.

- Topologia pozwala definiować nowe obiekty, np. liczby rzeczywiste: $\sqrt{2}$ to klasa równoważności wszystkich ciągów (Cauchy'ego) liczb wymiernych których kwadraty są zbieżne do 2.

- Ciągłe przekształcenia zachowują pewne kluczowe własności, np. $\mathbb{R}^m$ jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^n \iff m = n$.

• Ciągłość wymusza pewne efekty, np.

$$\forall f \in C(S^n, \mathbb{R}^n)\ \exists p \in S^n : f(p) = f(-p)$$

(twierdzenie Borsuka-Ulama). W szczególności, dla $n=2$, możemy wywnioskować że na powierzchni Ziemi zawsze istnieje para anty-podalnych punktów o identycznych wartościach ciśnienia i temperatury.

• Topologia na zbiorze X to rodzina $\mathcal{O}(X)$ podzbiorów zbioru X spełniająca warunki:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}(X)$

2) $A, B \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}(X)$

3) $\forall i \in I : A_i \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}(X)$,

Przestrzeń topologiczna to zbiór wyposażony w topologię.

• Niech $(X, \mathcal{O}(X))$ i $(Y, \mathcal{O}(Y))$ będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie $X \xrightarrow{f} Y$ nazywamy ciągłym jeśli

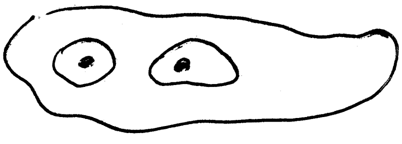
$$\boxed{V \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)}.$$

• <u>Pokrycie</u> zbioru X to taka rodzina $\{X_i\}_{i\in I}$ jego podzbiorów że $\bigcup_{i\in I} X_i = X$. Pokrycie nazywamy <u>otwartym</u> jeśli $\forall i\in I : X_i \in \mathcal{O}(X)$.

• Zbiór nazywamy <u>zwartym</u> jeśli z każdego jego otwartego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone:

$$\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} X_i = X \ ;\ X_i \in \mathcal{O}(X)\ \forall i\in I\right) \Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_n \in I : X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_n} = X}$$

• Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{O}(X))$ nazywamy <u>Hausdorffa</u> jeśli $\boxed{x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \in \mathcal{O}(X) : U \ni x,\ V \ni y,\ U \cap V = \emptyset}$



(2) OBIEKTY I MORFIZMY

Jednym z aksjomatów teorii zbiorów jest istnienie zbioru wszystkich podzbiorów danego zbioru. Odrzucenie tego aksjomatu daje pojęcie <u>klasy</u>. Zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje, ale możemy mówić o klasie wszystkich zbiorów.

<u>Kategoria $\mathcal{A}$</u> to para $(\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{A})$,

gdzie $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ jest klasą obiektów

(nie ma aksjomatu że istnieje klasa wszystkich podklas danej klasy), a

$\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$ jest klasą zbiorów morfizmów z obiektu A do obiektu B. Taki zbiór oznaczamy przez $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

Zakładamy przy tym aksjomaty:

i) $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B,C)$

$\exists!\ g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$

ii) $\forall A, B, C, D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C,D)$

$$\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$$

iii) $\forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}\ \exists\, id_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A)$:

$id_A \circ f = f$, $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, A)$, $g \circ id_A = g$, $\forall g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, Y)$

Uwaga: id_A jest jedyny bo $id_A = id_A \circ id_A' = id_A'$ $\boxed{4}$

Morfizm $X \xrightarrow{f} Y$ nazywamy <u>izomorfizmem</u> jeśli $\exists\, Y \xrightarrow{\tilde{f}} X : \tilde{f} \circ f = id_X$ i $f \circ \tilde{f} = id_Y$.

Morfizm $\tilde{f}$ jest jedyny bo $\tilde{f} = id_X \circ \tilde{f} = \tilde{f}' \circ f \circ \tilde{f} = \tilde{f}' \circ id_Y = \tilde{f}'$.

<u>Kategoria zbiorów $\mathcal{S}$</u>:

$Ob\, \mathcal{S}$ = klasa wszystkich zbiorów

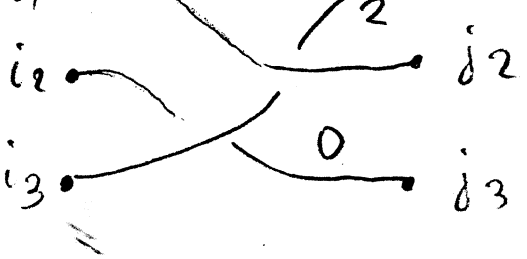
$Mor_{\mathcal{S}}(X, Y) = Map(X, Y)$ zbiór wszystkich odwzorowań.

<u>Kategoria wstążek $\mathcal{R}$</u>:

$Ob\, \mathcal{R}$ = zbiór wszystkich niepustych skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.

$Mor_{\mathcal{R}}(\{i_1, \dots, i_m\}, \{j_1, \dots, j_n\}) = \emptyset$ dla $m \neq n$,

$Mor_{\mathcal{R}}(\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\})$ = zbiór wszystkich warkoczy o <u>n-wstążkach</u>:



Każda wstążka ma przypisaną liczbę $k \in \mathbb{Z}$ będącą liczbą jej skręceń o kąt $k\pi$.

- W teorii kategorii morfizmy są "ważniejsze" od obiektów. Np. <u>grupoid</u> to mała kategoria (obiekty tworzą zbiór) której wszystkie morfizmy są izomorfizmami. <u>Grupa</u> to jedno-obiektowy grupoid.

(3) ZWARTE PRZESTRZENIE HAUSDORFFA

Kategorią zwartych przestrzeni Hausdorffa nazywamy kategorię której obiektami są zwarte przestrzenie Hausdorffa a morfizmami wszystkie odwzorowania ciągłe. $X \neq \emptyset \neq Y \Rightarrow Mor(X, Y) \neq \emptyset$ bo $X \xrightarrow{f} Y$, $f(x) := y_0$ $\forall x \in X$, jest zawsze ciągłe.

<u>Przykłady</u>:

- Podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest zwarty $\Leftrightarrow$ gdy jest domknięty i ograniczony
- $\prod_{i \in I} X_i$, X_i - zwarte $\forall i \in I$, jest zwarty w <u>topologii Tichonowa</u>
- Kula jednostkowa przestrzeni dualnej do unormowanej przestrzeni wektorowej jest zwarta (twierdzenie Banacha-Alaoglu)