CIĄGI UOGÓLNIONE W PRZESTRZENIACH ZWARTYCH

Quasi porządek w zbiorze X to relacja $\leqslant$ spełniająca następujące warunki:

i) $x \leqslant x,\ \forall x \in X$ (zwrotność);

ii) $(x \leqslant y$ i $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$ (przechodniość)

Przykład: $X = \mathbb{C}$, $z_1 \leqslant z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} |z_1| \leqslant |z_2|$.

Zbiór skierowany $(D, \leqslant)$ to zbiór D z relacją quasi porządku $\leqslant$ spełniającą warunek

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in D\ \exists \gamma \in D : \alpha \leqslant \gamma \text{ i } \beta \leqslant \gamma}$$

Przykład: $D = 2^X$, $\leqslant\ =\ \subseteq$.

Współkońcowym podzbiorem zbioru skierowanego $(P, \leqslant)$ nazywamy podzbiór $Q \subseteq P$ spełniający warunek $\boxed{\forall p \in P\ \exists q \in Q : p \leqslant q}$.

Przykład: Podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ jest współkońcowy z $(\mathbb{N}, \leqslant) \Leftrightarrow |X| = \infty$.

<u>Ciąg uogólniony</u> to odwzorowanie ze zbioru skierowanego D do przestrzeni topologicznej X. Ciągi uogólnione często oznaczamy przez $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$. W przypadku $D = \mathbb{N}$ (skierowanemu standardowym $\leq$), ciąg uogólniony nazywamy <u>ciągiem</u>.

<u>Granica ciągu uogólnionego</u> $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ to podzbiór $\lim\limits_{\alpha \in D} x_\alpha \subseteq X$ zdefiniowany przez

$$p \in \lim_{\alpha \in D} x_\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \mathcal{O}(x) \ni U \ni p \quad \exists\, \alpha_0 \in D \quad \forall\, \alpha_0 \leq \alpha : x_\alpha \in U$$

<u>Przykład</u>: $D = \mathbb{N}$, (X, d) - przestrzeń metryczna. Wtedy

$$p \in \lim_{n \in \mathbb{N}} \iff \forall B(p, \varepsilon) \ni p \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n_0 \leq n : x_n \in B(p, \varepsilon)$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n_0 \leq n : d(p, x_n) < \varepsilon.$$

Całka Riemanna jako granica ciągu uogólnionego.

Niech $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ będzie odcinkiem a $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funkcją. Niech $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ będzie dowolnym skończonym podziałem $[a,b]$, a $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, wyborem punktów z pododcinków. Punktowanym podziałem $[a,b]$ nazywamy parę

$$P_n = \left(a = x_0 < \ldots < x_n = b, \{t_i \in [x_i, x_{i+1}]\}_{i \in \{0,\ldots,n-1\}}\right).$$

Średnicą punktowanego podziału P_n nazywamy $d(P_n) := \max\limits_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)$. Niech $D_{[a,b]}$ oznacza zbiór wszystkich skończonych punktowanych podziałów $[a,b]$ skierowanych przez relację

$$P_n \leq Q_m \iff d(P_n) \geq d(Q_m).$$

Zdefiniujmy ciąg uogólniony $f_{P_n} := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_n)$. Wtedy $\lim\limits_{P_n \in D_{[a,b]}} f_{P_n} = \phi$ (np. dla f danej przez $f(x) = 1$ dla $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ dla $x \notin [a,b] \cap \mathbb{Q}$) lub

$$\boxed{\lim_{P_n \in D_{[a,b]}} f_{P_n} = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f}.$$

Punktem zbieżności ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ nazywamy $p \in X$ taki że

$$\boxed{\forall \alpha \in D,\ \mathcal{O}(X) \ni U \ni p\ \exists\, \alpha \leq \beta : \ x_\beta \in U}.$$

Przykład: $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \left((-1)^n + \frac{1}{n+1} \right) = \emptyset$, ale ± 1 są punktami zbieżności $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Przykład: $x \in \lim\limits_{\alpha \in D} x_\alpha \Rightarrow x$ jest punktem zbieżności $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.

Twierdzenie: X jest przestrzenią zwartą $\Leftrightarrow$ każdy jej ciąg uogólniony ma punkt zbieżności.

Dowód: Załóżmy że X jest zbiorem zwartym a $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ ciągiem uogólnionym. Niech $E_\alpha := \{x_\beta \mid \alpha \leq \beta\}$. Z własności skierowania zbioru D wynika że $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n : E_{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_{\alpha_n} \neq \emptyset$. Istotnie, $\exists\, \gamma \in D\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \alpha_i \leq \gamma$, więc $x_\gamma \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_{\alpha_i} \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{E_{\alpha_i}}$.

Zatem zwartość X implikuje że $\bigcap_{\alpha \in D} \overline{E_\alpha} \neq \emptyset$.

Weźmy $x \in \bigcap_{\alpha \in D} \overline{E_\alpha}$ oraz $\mathcal{O}(X) \ni U \ni x$.

Wtedy $\forall \alpha \in D: U \cap E_\alpha \neq \emptyset$. Stąd

$\forall \alpha \in D$, $\mathcal{O}(X) \ni U \ni x$ $\exists \alpha \leq \beta : x_\beta \in U$,

czyli x jest punktem zbieżności $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$

Załóżmy teraz że X nie jest zbiorem zwartym. Istnieje wtedy $\{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \in \mathcal{O}(X)$ $\forall i \in I$, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, takie że $\forall \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$: $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \neq X$.

Niech F_I będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów I skierowanych przez $\subseteq$. Możemy wtedy zdefiniować ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha \in F_I}$ każdemu $\alpha \in F_I$ przypisujący $x \notin \bigcup_{j \in \alpha} U_j$. Weźmy teraz dowolny $x \in X$. $\exists i \in I$: $x \in U_i$. Mamy też $i \in \alpha \in F_I \Rightarrow x_\alpha \notin U_i$. Zatem dla $\beta = \{i\}$ oraz $\mathcal{O}(X) \ni U_i \ni x$ nie istnieje $\beta \subseteq \alpha$ takie że $x_\alpha \in U_i$. $\square$ $\boxed{11}$

<u>Podciąg uogólniony</u> ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ to ciąg uogólniony $\{y_\beta\}_{\beta \in E}$ taki że:

i) $\exists \varphi : E \to D : \beta \leq \beta' \Rightarrow \varphi(\beta) \leq \varphi(\beta')$,

ii) $\varphi(E)$ jest współkońcowy w D,

iii) $\forall \beta \in E : y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$.

<u>Twierdzenie</u>: X jest przestrzenią zwartą $\Longleftrightarrow$ każdy jej ciąg uogólniony posiada zbieżny (o niepustej granicy) podciąg uogólniony.

<u>Dowód</u>: Implikacja z prawa do lewa jest ćwiczeniem. Niech $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ będzie **dowolnym** ciągiem uogólnionym w zbiorze zwartym X. Oznaczmy $\mathcal{U}_p := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid p \in U\}$. Poprzednie twierdzenie implikuje że $\exists p \in X \ \forall \beta \in D, U \in \mathcal{U}_p \ \exists \beta \leq \gamma : x_\gamma \in U$. Zbiór $E := \{(\alpha, U) \in D \times \mathcal{U}_p \mid x_\alpha \in U\}$ jest skierowany przez $(\alpha, U) \leq (\alpha', U') \Leftrightarrow (\alpha \leq \alpha' \text{ i } U \supseteq U')$. Istotnie, $\forall (\alpha, U), (\alpha', U') \in E$ $\exists \beta \in D : (\alpha \leq \beta \text{ i } \alpha' \leq \beta)$ oraz $\exists \beta \leq \gamma : x_\gamma \in U \cap U'$. Zatem 12

$(\gamma, U \cap U') \in E$ oraz $(\alpha, U) \leq (\gamma, U \cap U')$ i $(\alpha', U') \leq (\gamma, U \cap U')$. Odwzorowanie $E \ni (\alpha, U) \xmapsto{\varphi} \alpha \in D$ jest monotoniczne. $\varphi(E) = D$ bo $\forall \alpha \in D : (\alpha, X) \in E$. Zatem $\varphi(E)$ jest współkońcowy. Stąd $\{x_{\varphi(\alpha, U)}\}_{(\alpha, U) \in E}$ jest podciągiem uogólnionym. Ponadto, założenie że p jest punktem zbieżności $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ implikuje że $\forall U \in \mathcal{U}_p \ \exists (\gamma, U) \in E \ \forall (\gamma, U) \leq (\gamma', U') : x_{\varphi(\gamma', U')} = x_{\gamma'} \in U' \in U$, czyli $p \in \lim_{(\alpha, U) \in E} x_{\varphi(\alpha, U)}$. ∎