GRUPY ZWARTE HAUSDORFFA

Grupa topologiczna $(G, +, 0, \mathcal{O}(G))$

to grupa $(G, +, 0)$ wyposażona w topologię $\mathcal{O}(G)$ taką że odwzorowania

$$G \times G \xrightarrow{+} G, \quad G \ni g \mapsto g^{-1} \in G,$$

są ciągłe.

Przykłady:

① $GL_n(\mathbb{C})$ z mnożeniem i topologią euklidesową, $\mathbb{C}^n$ z dodawaniem i topologią euklidesową.

② Dowolna grupa G z topologią dyskretną $(\mathcal{O}(G) = 2^G)$ lub anty-dyskretną $(\mathcal{O}(G) = \{\emptyset, G\})$.

③ Niech X będzie zbiorem z quasi porządkiem $\leq$. Topologią Aleksandrowa (porządkową) nazywamy topologię której elementy (zbiory otwarte) zdefiniowane są przez warunek $(x \in U \text{ i } x \leq y) \Rightarrow y \in U$.

W tej topologii odwzorowania są ciągłe $\Longleftrightarrow$ są monotoniczne. Grupa $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ma ciągłe działanie w swojej naturalnej topologii porządkowej, ale nie jest grupą topologiczną gdyż odwzorowanie $\mathbb{Z} \ni n \longmapsto -n \in \mathbb{Z}$ nie zachowuje porządku.

④ Niech $(\mathbb{R}, +, 0)$ będzie grupą z topologią euklidesową powiększoną o zbiory otwarte postaci $\{0\} \cup U$, gdzie U jest zbiorem otwartym w topologii euklidesowej. W szczególności $\{0\}$ jest zbiorem otwartym. Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni r \mapsto -r \in \mathbb{R}$ jest ciągłe w tej topologii, ale dodawanie $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nie jest:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \left(\frac{1}{n+1} - 1\right)\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \phi \not\ni$$

$$\{0\} = +(\{(1,-1)\}) = +\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \left(1, \frac{1}{n+1} - 1\right)\right).$$

Grupa zwarta Hausdorffa to grupa topologiczna $(G, +, 0, \mathcal{O}(G))$ taka że $(G, \mathcal{O}(G))$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa.

Przykłady: (1) Grupa macierzy unitarnych $U(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = I\}$ z topologią euklidesową. Tutaj $A^*_{ij} := \overline{A_{ji}}$ $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) Grupa macierzy ortogonalnych $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$ z topologią euklidesową. Tutaj $A^T_{ij} := A_{ji}$ $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(3) Każda grupa G z topologią antydyskretną $\mathcal{O}(G) = \{\emptyset, G\}$ jest zwartą grupą topologiczną, ale tylko grupa trywialna $\{0\}$ jest w tej topologii grupą zwartą Hausdorffa.

(4) Każda grupa skończona z topologią dyskretną jest grupą zwartą Hausdorffa.

Półgrupa $(G, +)$ to zbiór G z łącznym działaniem $G \times G \xrightarrow{+} G$.

Półgrupa topologiczna $(G, +, \mathcal{O}(G))$ to półgrupa $(G, +)$ której działanie jest ciągłe w topologii $\mathcal{O}(G)$. Półgrupę topologiczną nazywamy zwartą Hausdorffa jeśli $(G, \mathcal{O}(G))$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa.

Twierdzenie: Każda niepusta półgrupa zwarta Hausdorffa spełniająca $gh = gh' \Rightarrow h = h'$ i $hg = h'g \Rightarrow h = h'$ jest grupą zwartą Hausdorffa.

Dowód: Niech G będzie półgrupą zwartą Hausdorffa. $G \neq \emptyset \Rightarrow \exists h \in G$. Oznaczmy $H := \overline{\{h^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Rozważmy rodzinę $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ wszystkich niepustych domkniętych podzbiorów H spełniających $H I_\alpha \subseteq I_\alpha$.

Rodzina ta jest niepusta gdyż H jest domkniętym niepustym podzbiorem H spełniającym $H \cdot H \subseteq H$. Istotnie, oznaczmy przez F funkcję działanie w półgrupie i, korzystając z jej ciągłości i domkniętości H, zauważmy że $F(H \times H) = F\left(\overline{\{h^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \times \{h^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}}\right) \subseteq \overline{F\left(\{h^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \times \{h^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}\right)} \subseteq H$.
Istnieje więc $I := \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$. Pokażmy że $I \neq \emptyset$.
Korzystając z ciągłości działania i warunku Hausdorffa sprawdzamy że działanie zawężone do H jest przemienne: $lk = \lim_{\zeta\in L} h^{m(\zeta)} \lim_{\xi\in K} h^{n(\xi)} =$
$= \lim_{\zeta\in L} \lim_{\xi\in K} h^{m(\zeta)+n(\xi)} = \lim_{\zeta\in L} k h^{m(\zeta)} = k l$. Mamy więc $\emptyset \neq I_\alpha I_\beta = I_\beta I_\alpha$
$\subseteq I_\alpha \cap I_\beta$ $\forall \alpha, \beta \in A$, ze zwartości G wynika że $I \neq \emptyset$. Dalej,

$$\forall k \in H: kI \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} k I_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha = I.$$

Z drugiej strony, $I = \overline{I}$ i G jest zwarte $\Rightarrow$ I jest zwarte. Ciągłość F implikuje że $kI = F(k, I)$ jest zwarte. Zatem z warunku Hausdorffa $\overline{kI} = kI$. Z konstrukcji, $kI \neq \phi$. Z łączności działania w G i przemienności działania w H mamy jeszcze $H(kI) = (Hk)I = (kH)I = k(HI) \subseteq k\bigcap_{\alpha\in A} HI_\alpha \subseteq kI$. Stąd $kI \in \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Teraz wnioskujemy że $I = kI \cap \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq kI$. Zatem $I = kI$. W szczególności dla $k = p \in I$ mamy $I = pI$. Istnieje więc $e \in I : p = pe$. Z praw skracania otrzymujemy że e jest elementem neutralnym $\forall g \in G: \; pg = peg \Rightarrow g = eg$ oraz $\forall g' \in G:$ $g'g = g'eg \Rightarrow g' = g'e$. Ponieważ $I \xrightarrow{F(h,\cdot)} I$ jest injekcją z prawa skracania i surjekcją z $hI = I$, możemy zdefiniować $h^{-1} := F(h,\cdot)^{-1}(e)$. Wtedy $hh^{-1} = e$ oraz $h^{-1}hh^{-1}h = eh^{-1}h \Rightarrow h^{-1}h = e$. Zatem G jest grupą. Do sprawdzenia ciągłości odwzorowania $G \ni h \mapsto h^{-1} \in G$ rozpatrujemy $G\times G \xrightarrow{W} G\times G$, $W(g,h) = (g, gh)$. Mamy $W^{-1}(a,b) := (a, a^{-1}b)$. W jest ciągłe więc ze zwartości Hausdorffa wynika ciągłość W^{-1}. Złożenie odwzorowań $G \xrightarrow{(\cdot,e)} G\times G \xrightarrow{W^{-1}} G\times G \xrightarrow{\pi_2} G$, $g \mapsto (g,e) \mapsto (g, g^{-1}) \mapsto g^{-1}$, jest odwzorowaniem ciągłym. $\square$