TOPOLOGICZNE PRZESTRZENIE WEKTOROWE I ALGEBRY

Pierścień $(R, +, 0, \cdot, 1)$ to grupa abelowa $(R, +, 0)$, $\forall r, s \in R: r+s = s+r$, wyposażona w łączne działanie $R \times R \xrightarrow{\cdot} R$ z elementem neutralnym i spełniające prawa rozdzielności:

(L) $\forall a, b, c \in R: \ a(b+c) = ab + ac$,

(R) $\forall a, b, c \in R: \ (b+c)a = ba + ca$.

$(R, +, 0, \cdot, 1, \mathcal{O}(R))$ nazywamy **pierścieniem topologicznym** jeśli $(R, +, 0, \mathcal{O}(R))$ jest grupą topologiczną i działanie $R \times R \xrightarrow{\cdot} R$ jest ciągłe w $\mathcal{O}(R)$.

Przykłady: (1) $M_n(\mathbb{Z})$ z topologią dyskretną,
(2) $M_n(\mathbb{C})$ z topologią euklidesową,
(3) $\mathrm{Map}(X, \mathbb{Z})$ z topologią antydyskretną.

Ciało topologiczne $(k, +, 0, \cdot, 1, \mathcal{O}(k))$ to ciało które jest pierścieniem topologicznym takim że odwzorowanie $k \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in k \setminus \{0\}$ jest ciągłe. Przykład: $\mathbb{C}$ z topologią Euklidesową.

Topologiczna przestrzeń wektorowa

$(V, +, 0, \mathcal{O}(V), \cdot, k, \mathcal{O}(k))$ to

przestrzeń wektorowa nad topologicznym ciałem taka że działania

$V \times V \xrightarrow{+} V$ i $k \times V \xrightarrow{\cdot} V$ są

ciągłe w topologii produktowej.

Uwaga: $(V, +, 0, \mathcal{O}(V))$ jest automatycznie grupą topologiczną bo odwzorowanie $V \ni v \mapsto -v \in V$ jest złożeniem odwzorowań ciągłych: $V \to k \times V \to V$,

$v \mapsto (-1, v) \mapsto (-1)v = (-1)v + v - v = (1-1)v - v$

$= 0v - v = -v$. Mamy $0v = 0$ bo

$0v + v = (0+1)v = v \implies 0v = 0$.

<u>Przestrzeń wektorowa unormowana</u> $(V, \|\ \|)$ to przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ wyposażona w <u>normę</u> czyli odwzorowanie $\|\ \| : V \to [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ spełniające

① $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$,

② $\forall v \in V,\ \lambda \in k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} : \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$,

③ $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

<u>Przykłady</u>: ① $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ z normą euklidesową

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

② $l^p := \{\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^p < \infty\}$ z normą $\|\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,

③ $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ lub $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}$ z normą euklidesową.

<u>Twierdzenie</u>: Wzór $d(x, y) := \|x - y\|$ definiuje metrykę na unormowanej przestrzeni wektorowej $(V, \|\ \|)$. Ze względu na topologię tej metryki V jest topologiczną przestrzenią wektorową.

Topologiczną przestrzeń wektorową $(V,+,0,k,\cdot,\mathcal{O}(V),\mathcal{O}(k))$ nazywamy <u>ciągowo zupełną</u> jeśli dla ciągów w V mamy

$$\left(\forall\, \mathcal{O}(V)\ni U\ni 0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N:\ v_m-v_n\in U\right)\Rightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} v_n\neq\emptyset.$$

Unormowaną przestrzeń wektorową która jest ciągowo zupełna względem topologii indukowanej przez swoją normę nazywamy <u>przestrzenią Banacha</u>. Innymi słowy, przestrzeń Banacha to przestrzeń unormowana w której każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Przestrzeń Banacha nad $\mathbb{C}$ nazywamy <u>przestrzenią Hilberta</u> jeśli jest wyposażona w <u>iloczyn skalarny</u> zgodny z normą czyli odwzorowanie $V\times V\xrightarrow{\langle\,|\,\rangle}\mathbb{C}$ spełniające

① $\forall v_1,v_2,v_3,v_4\in V:\ \langle v_1+v_2|v_3+v_4\rangle = \langle v_1|v_3\rangle+\langle v_1|v_4\rangle+\langle v_2|v_3\rangle+\langle v_2|v_4\rangle,$

② $\forall v,w\in V,\lambda\in\mathbb{C}:\ \langle w|\lambda v\rangle=\lambda\langle w|v\rangle,$

③ $\forall v,w\in V:\ \langle w|v\rangle=\overline{\langle v|w\rangle},$

④ $\forall v\in V:\ \langle v|v\rangle=\|v\|^2.$

<u>Algebra nad ciałem k</u> to przestrzeń wektorowa A nad k wyposażona w łączne mnożenie $A\times A\to A$ biliniowe nad k.

Algebra topologiczna to algebra wyposażona w topologię taką że jest ona topologiczną przestrzenią wektorową z mnożeniem ciągłym w topologii produktowej. (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$)

Algebra unormowana A to algebra wyposażona w normę $A \xrightarrow{\|\ \|} \mathbb{R}$ czyniącą ją unormowaną przestrzenią wektorową oraz spełniającą warunek:

$$\boxed{\forall a, b \in A : \ \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|}$$

Algebra unormowana jest automatycznie algebrą topologiczną względem topologii normowej:

$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab\|$

$\leq \|a_n(b_n - b)\| + \|(a_n - a) b\| \leq \|a_n\| \, \|b_n - b\|$

$+ \|a_n - a\| \, \|b\|$ pociąga za sobą implikację $(a_n, b_n) \to (a, b) \implies a_n b_n \to ab$.

<u>Algebra Banacha</u> to algebra unormowana zupełna względem metryki indukowanej przez normę. <u>C^*-algebra</u> to algebra Banacha nad $\mathbb{C}$ wyposażona w $A \xrightarrow{*} A$ spełniające

① $\forall a,b \in A: (a+b)^* = a^* + b^*$,

② $\forall a \in A, \lambda \in \mathbb{C}: (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$,

③ $\forall a,b \in A: (ab)^* = b^* a^*$,

④ $\forall a \in A: (a^*)^* = a$,

⑤ $\forall a \in A: \boxed{\|aa^*\| = \|a\|^2}$.

<u>Przykłady</u>: ① Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Wtedy algebra $C(X)$ wszystkich zespolonych funkcji ciągłych na X jest C^*-algebrą względem normy $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ i gwiazdki $f^*(x) = \overline{f(x)}, \forall x \in X$.

② Algebra macierzy zespolonych $M_n(\mathbb{C})$ jest C^*-algebrą względem normy $\|M\| := \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mv\|}{\|v\|}$ i gwiazdki $(M^*)_{ij} := \overline{M_{ji}}, \forall i,j$.