ALGEBRY OPERATORÓW

Algebry odwzorowań liniowych:

przestrzeń wektorowa V	podalgebra End(V)
unormowana	Algebra wszystkich <u>ograniczonych</u> odwzorowań liniowych jest algebrą unormowaną.
Banacha	Algebra wszystkich <u>ograniczonych</u> odwzorowań liniowych jest algebrą Banacha.
Hilberta	Algebra wszystkich <u>ograniczonych</u> odwzorowań liniowych jest C^*-algebrą.

Dla wszystkich tych algebr $V \xrightarrow{id} V$ jest ich jedynką: $f \circ id = f = id \circ f$.

Niech $(V, \| \ \|)$ będzie przestrzenią wektorową unormowaną. Odwzorowanie liniowe $T: V \to V$ nazywamy **ograniczonym** jeśli jego **norma operatorowa**

$$\boxed{\|T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|Tv\|}$$

jest skończona.

Ograniczone odwzorowania na przestrzeni unormowanej nazywamy **operatorami**.

Twierdzenie: Podzbiór wszystkich ograniczonych odwzorowań liniowych jest podalgebrą $End(V) := Hom(V, V)$ będącą algebrą unormowaną ze względu na normę operatorową.

Podalgebrę wszystkich ograniczonych elementów $End(V)$ oznaczamy przez $B(V)$.

Twierdzenie: Jeśli V jest przestrzenią Banacha, to algebra $B(V)$ wszystkich ograniczonych odwzorowań liniowych z V w V jest algebrą Banacha ze względu na normę operatorową.

Twierdzenie: Jeśli V jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \mid \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, to:

① $\forall T \in B(V)\ \exists! T^* \in B(V)\ \forall u, v \in V$:

$$\langle T^* u \mid v \rangle = \langle u \mid T v \rangle,$$

② $B(V)$ jest C^*-algebrą ze względu na $* : B(V) \longrightarrow B(V)$ zdefiniowaną w ① i normą operatorową.

Dowód: Z Twierdzenia Riesza wiemy że dla każdego ciągłego funkcjonału liniowego $\varphi : V \to \mathbb{C}$ istnieje dokładnie jeden wektor v_φ taki że $\forall v \in V$: $\varphi(v) = \langle v_\varphi \mid v \rangle$.

Z drugiej strony, z nierówności
Bunyakovsky - Cauchy - Schwarza

$$\boxed{|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|}$$

wnioskujemy

że funkcjonał liniowy $\langle x| : y \mapsto \langle x|y\rangle$ jest ciągły: $|\langle x|y_n\rangle - \langle x|y\rangle|$

$= |\langle x|y_n - y\rangle| \leq \|x\| \, \|y_n - y\| \to 0$

jeśli $y_n \to y$. Dalej, operator $T \in B(V)$ jest ciągły bo $\|y_n - y\| \to 0 \Rightarrow$

$$\|Ty_n - Ty\| \leq \|T\| \, \|y_n - y\| \to 0.$$

Zatem $\varphi : V \ni v \mapsto \langle u|Tv\rangle \in \mathbb{C}$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym dla każdego $u \in V$. Stąd, przy ustalonym $T \in B(V)$, $\forall u \in V \; \exists! \; T^* u \in V$ takie że: $\langle T^* u|v\rangle = \langle u|Tv\rangle$. Mamy

$\langle T^*(u+u')|v\rangle = \langle u|Tv\rangle + \langle u'|Tv\rangle$

$= \langle T^* u + T^* u'|v\rangle$. Podstawiając

Z $v = T^*(u+u') - T^*u - T^*u'$ otrzymujemy
$\|T^*(u+u') - T^*u - T^*u'\|^2 = 0$ czyli
$T^*(u+u') = T^*u + T^*u'$. Podobnie
dostajemy $T(\lambda u) = \lambda(Tu)$. Wreszcie
$\|T^*u\|^2 = \langle T^*u | T^*u\rangle = \langle u | T(T^*u)\rangle$
$\leq \|u\| \, \|T(T^*u)\| \leq \|u\| \, \|T\| \, \|T^*u\|$,
skąd $\|T^*u\| \leq \|u\| \, \|T\|$. Zatem
$\|T^*\| \leq \|T\| < \infty$. Możemy więc
wywnioskować że $T^* \in B(V)$. Teraz
sprawdzamy 5 aksjomatów $*$. Półtora-
liniowość wynika natychmiast
z $\langle v|v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Inwolutyw-
ność wynika z $\langle T^{**}u|v\rangle = \langle u|T^*v\rangle$
$= \overline{\langle T^*v|u\rangle} = \overline{\langle v|Tu\rangle} = \langle Tu|v\rangle$,
antyhomomorficzność zaś z
$\langle (TS)^*u|v\rangle = \langle u|T(Sv)\rangle = \langle T^*u|Sv\rangle$
$= \langle S^*(T^*u)|v\rangle$. Dla sprawdzenia ostatniego

warunku zauważmy że

$$\|T^*u\|^2 = \langle T^*u | T^*u \rangle = \langle u | TT^*u \rangle$$

$$\leq \|u\| \, \|TT^*\| \, \|u\| = \|u\|^2 \|TT^*\|$$

$\Rightarrow \|T^*\|^2 \leq \|TT^*\|$. Mamy też

$\|TT^*\| \leq \|T\| \, \|T^*\|$ i $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\|$.

Wnioskujemy stąd że $\|T^*\| = \|T\|$

oraz $\|T^*\|^2 \leq \|TT^*\| \leq \|T^*\|^2$. Zatem

$\|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. To że $B(V)$

jest algebrą Banacha wynika z

poprzedniego twierdzenia. □

Twierdzenie (Gelfand-Naimark):

Dla każdej C^*-algebry A istnieje przestrzeń Hilberta H taka że A jest izomorficzna z C^*-podalgebrą $B(H)$.

Dowód: H konstruujemy z funkcjonału liniowego na A i $*: A \to A$. □