KATEGORIA C^*-ALGEBR Z JEDYNKĄ

$Ob\,\mathcal{C}$ = klasa wszystkich C^*-algebr z 1. $\forall A, B \in Ob\,\mathcal{C}$:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) = \{ f \in Hom_{\mathbb{C}}(A,B) \mid \forall x,y \in A:$$
$$f(xy) = f(x)f(y),\ f(1) = 1,\ f(x^*) = f(x)^* \}.$$

Twierdzenie: Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią C^*-algebr z jedynką. Wtedy

$$\boxed{f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \implies \forall a \in A: \|f(a)\| \leq \|a\|}$$

Wniosek: Każdy morfizm jest ciągły ze względu na normową topologię. Wystarczy zatem znać jego wartości na gęstym podzbiorze.

Przykłady: ① Niech $X \xrightarrow{F} Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem pomiędzy zwartymi przestrzeniami Hausdorffa. Wówczas $C(Y) \ni f \overset{F^*}{\longmapsto} f \circ F \in C(X)$ jest morfizmem C^*-algebr z 1. ② Niech U będzie unitarnym operatorem na przestrzeni Hilberta H ($UU^* = id = U^*U$). Wtedy $B(H) \ni M \longmapsto UMU^* \in B(H)$ jest morfizmem C^*-algebr z 1.

Twierdzenie $\mathcal{C}$ jest ewidentnie prawdziwe w powyższych przykładach:

(1) $$\|F^*(f)\| = \sup_{x\in X} |f(F(x))| = \sup_{y \in \operatorname{Im} F \subseteq Y} |f(y)|$$

$$\leq \sup_{y\in Y} |f(y)| = \|f\|$$

(2) $$\|uMu^*\| \leq \|u\|\,\|M\|\,\|u^*\| = \|M\|$$

Zauważmy że $\|u\| = 1$ bo $\|u\|^2 = \|u^*u\|$ $= \|1\| = 1$. Istotnie, dla każdej C^*-algebry z 1 mamy $1^* a = 1^* a^{**} = (a^* 1)^* = a^{**} = a$ i $a 1^* = a$ dla dowolnego elementu w tej algebrze. Zatem $1^* = 1$ i $\|1\|^2 = \|1^* 1\|$ $= \|1\|$. Stąd $\|1\| = 1$ bo $\|1\| = 0$ $\Rightarrow 1 = 0$.

Twierdzenie $\mathcal{D}$: Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią C^*-algebr z 1. Wtedy

$$\boxed{f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \Rightarrow \overline{f(A)} = f(A)}.$$

Wniosek (D): Niech A i B będą C^*-algebrami z 1, $A \xrightarrow{f} B$ morfizmem, a D gęstym podzbiorem A, tzn. $\overline{D} = A$. Wówczas

$$\overline{f(D)} = B \iff f(A) = B.$$

Dowód: Morfizm f jest ciągły z Twierdzenia C, więc $f(A) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq B$. Zatem prawa strona implikuje lewą. Z drugiej strony, $\overline{f(D)} \subseteq \overline{f(\overline{D})} = \overline{f(A)} = f(A)$ na mocy Twierdzenia D. Stąd z lewej strony wynika prawa. $\square$

Topologia na zbiorze charakterów:

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią C^*-algebr z 1. Zbiór $\boxed{\mathcal{X}(A) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{C})}$ nazywamy zbiorem **charakterów** C^*-algebry A.

Elementy $\mathcal{X}(A)$ (charaktery) nazywamy też **punktami klasycznymi** A. Są one w szczególności odwzorowaniami liniowymi z przestrzeni unormowanej A w przestrzeń unormowaną $\mathbb{C}$.

Dla homomorfizmów z przestrzeni unormowanej V w przestrzeń unormowaną W można zdefiniować normę tak samo jak dla $End(V)$:

$$\|\varphi\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|\varphi(v)\|.$$

Każde odwzorowanie ograniczone w tej normie operatorowej jest ciągłe względem topologii normowej na V i W. Z Twierdzenia C wynika, że

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{a \in A \\ \|a\|=1}} |\varphi(a)| \leq 1.$$

Z drugiej strony $\|\varphi(1)\| = \|1\| = 1$, więc $\|\varphi\| = 1$. Zatem φ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na przestrzeni Banacha A. Pozwala to zastosować Twierdzenie Banacha-Alaoglu o zwartości kuli jednostkowej w topologii WST do udowodnienia zwartości $X(A)$. Ogólnie, jeśli X jest zbiorem a Y jest przestrzenią topologiczną, to na $Map(X, Y)$

możemy wprowadzić <u>topologię zbieżności punktowej</u>. Jest to najmniejsza topologia na $Map(X,Y)$ w której <u>wszystkie</u> ewaluacje $Map(X,Y) \ni f \xmapsto{ev_x} f(x) \in Y$ są ciągłe. Innymi słowy $\mathcal{O}(Map(X,Y))$ jest przecięciem wszystkich topologii na $Map(X,Y)$ zawierających rodzinę $\bigcup_{x\in X} ev_x^{-1}(\mathcal{O}(Y))$. W tej topologii

$$\varphi_\alpha \to \varphi \overset{def}{\iff} \varphi \in \lim_{\alpha\in D} \varphi_\alpha \Rightarrow \forall x\in X: \varphi(x) \in \lim_{\alpha\in D} \varphi_\alpha(x)$$

$\Leftarrow \forall x \in X: \varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$. Jeśli zaś $\varphi_\alpha \not\to \varphi$, to $\exists\, \mathcal{O}(Map(X,Y)) \ni U \ni \varphi\ \forall \beta\in D\ \exists \beta \leq \alpha$: $\varphi_\alpha \notin U$, czyli $\exists\, x_1, \dots, x_n \in X,\ V_1, \dots, V_n \in \mathcal{O}(Y)$: $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \varphi(x_i) \in V_i$ i $\forall \beta\in D\ \exists \beta \leq \alpha$, jedli $\varphi_\alpha(x_j) \notin V_j$, czyli $\exists\, x_0 \in X, V_0 \in \mathcal{O}(Y)$: $\varphi(x_0) \in V_0$ i $\forall \beta \in D\ \exists \beta \leq \alpha$: $\varphi_\alpha(x_0) \notin V_0$. Tak więc $\varphi_\alpha(x_0) \not\to \varphi(x_0)$

Pokazaliśmy w ten sposób że w topologii zbieżności punktowej prawdziwy jest warunek

$$\boxed{\varphi_\alpha \to \varphi \iff \forall x \in X : \varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)}.$$

Zauważmy dalej że jeśli również X jest przestrzenią topologiczną, to ztopologizowanie $Map(C(X,Y), Y)$ topologią zbieżności punktowej gwarantuje ciągłość transformaty

$$X \ni x \xmapsto{ev} ev_x \in Map(C(X,Y), Y).$$

Istotnie, $x_\alpha \to x \Rightarrow \forall f \in C(X,Y) : ev_{x_\alpha}(f) \to ev_x(f)$

$\iff ev_{x_\alpha} \to ev_x$. Zauważmy następnie że jeśli X jest przestrzenią Tichonowa i $Y = \mathbb{C}$, to transformata ev jest injektywna bo istnieje funkcja ciągła rozdzielająca każde dwa różne punkty. Najciekawsze jest jednak że jeśli X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, to $\boxed{ev(X) = \mathcal{X}(C(X))}$.