KLASYCZNY WIDOK NA PRZESTRZENIE I GRUPY KWANTOWE

Twierdzenie: Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa a $\mathcal{X}(C(X))$ zbiorem wszystkich charakterów algebry $C(X)$ wszystkich zespolonych ciągłych funkcji na X. Ze względu na topologię zbieżności punktowej na $\mathcal{X}(C(X))$, odwzorowanie ewaluacyjne

$$X \ni x \xmapsto{ev} ev_x \in \mathcal{X}(C(X)),\quad ev_x(f) := f(x),$$

jest **homeomorfizmem**.

Dowód: Zwarta przestrzeń Hausdorffa jest Tichonowa, więc ev jest ciągłą injekcją. Przypuśćmy że ev nie jest surjekcją. Wtedy $\exists\, \varphi \in \mathcal{X}(C(X))\ \forall x \in X\ \exists f_x \in C(X)$: $|\varphi(f_x) - f_x(x)|^2 > 0$. Z ciągłości f_x owo wynika że $\forall x \in X\ \exists\, \mathcal{O}(X) \ni U_x \ni x\ \forall y \in U_x$: $|\varphi(f_x) - f_x(y)|^2 > 0$. $\{U_x\}_{x\in X}$ jest otwartym pokryciem X, więc ze zwartości możemy wybrać podpokrycie skończone $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Wnioskujemy stąd że $\forall y \in X : \sum_{i=1}^{n} |\varphi(f_{x_i}) - f_{x_i}(y)|^2 > 0$.

Z drugiej strony, $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(f_{x_i}) - f_{x_i}|^2\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(f_{x_i}) - \varphi(f_{x_i}))\varphi\left(\overline{\varphi(f_{x_i}) - f_{x_i}}\right) = 0,$$

co jest sprzeczne z odwracalnością $\sum_{i=1}^{n} |\varphi(f_{x_i}) - f_{x_i}|^2$. Zatem ev jest ciągłą bijekcją. Każda ciągła bijekcja ze zbioru zwartego w zbiór Hausdorffa jest homeomorfizmem, więc pozostaje wykazać że $X(C(X))$ jest Hausdorffa. W tym celu weźmy $x, y \in X$, $x \neq y$, $f \in C(X)$, $f(x) = 0$, $f(y) = 1$,

$U_x := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{3}\}$, $U_y := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \frac{1}{3}\}$.

Z definicji topologii zbieżności punktowej zbiory $ev_f^{-1}(U_x)$ i $ev_f^{-1}(U_y)$ są otwarte. Zauważmy, że $ev_p \in ev_g^{-1}(V)$ $\iff ev_g(ev_p) \in V \iff ev_p(g) \in V \iff g(p) \in V$.

Zatem $f(x) \in U_x$, $f(y) \in U_y$, $U_x \cap U_y = \emptyset$, implikują, że $ev_x \in ev_f^{-1}(U_x)$, $ev_y \in ev_f^{-1}(U_y)$ oraz $ev_f^{-1}(U_x) \cap ev_f^{-1}(U_y) = \emptyset$. $\square$

Wniosek: $\forall f \in Mor_{\mathbb{C}}(C(Y), C(X)) \exists! F \in C(X,Y)$:

$$\boxed{f = F^*}.$$

Dowód: $\forall x \in X$: $ev_x \circ f \in \chi(C(Y))$. Możemy zdefiniować $X \xrightarrow{F} Y$, $F(x) = ev^{-1}(ev_x \circ f)$.

Ciągłość F wynika z ciągłości w topologii zbieżności punktowej odwzorowania pullbackowego $\chi(C(X)) \ni \varphi \overset{f^*}{\longmapsto} \varphi \circ f \in \chi(C(Y))$. Istotnie, $\varphi_n \to \varphi \implies \forall a \in C(Y): \varphi_n(f(a)) \to \varphi(f(a)) \iff \varphi_n \circ f \to \varphi \circ f$.

Wreszcie $f = F^* \iff \forall a \in C(Y): f(a) = F^*(a) := a \circ F$

$\iff \forall a \in C(Y), x \in X: \quad f(a)(x) = a(F(x))$

$= a\left(ev^{-1}(ev_x \circ f)\right) = (ev_x \circ f)(a) = ev_x(f(a)) =$

$= f(a)(x)$. Jedyność F jest oczywista: $\exists x \in X: F(x) \neq \tilde{F}(x)$

$\Rightarrow \exists a \in C(Y): \ a(F(x)) = 0 \ i \ a(\tilde{F}(x)) = 1$

$\Rightarrow (F^*(a))(x) \neq (\tilde{F}^*(a))(x) \Rightarrow F^* \neq \tilde{F}^*$. $\square$

Przemienne Twierdzenie Gelfanda-Naimarka:

Jeśli A jest przemienną C^*-algebrą z jedynką, to $\mathcal{X}(A)$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa i odwzorowanie ewaluacyjne $A \ni a \xmapsto{ev} ev_a \in C(\mathcal{X}(A))$, $ev_a(\varphi) := \varphi(a)$, jest izomorfizmem C^*-algebr.

Za pomocą funktora kontrawariantnego możemy teraz włożyć kategorię zwartych przestrzeni Hausdorffa w kategorię C^*-algebr z 1-ą, i utożsamić ją z podkategorią algebr przemiennych.

Funktor kowariantny (kontrawariantny)

z kategorii $\mathcal{A}$ do kategorii $\mathcal{B}$ to przyporządkowanie $Ob\,\mathcal{A} \xrightarrow{F} Ob\,\mathcal{B}$,

$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \xrightarrow{F} Mor_{\mathcal{B}}(F(A),F(B))$ (kowariantny),

$Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{B}}(F(B),F(A))$ (kontrawariantny)

takie że
$$\boxed{\begin{array}{l} F(g\circ f) = F(g)\circ F(f) \quad (\text{ko}), \\ F(g\circ f) = F(f)\circ F(g) \quad (\text{kontra}) \end{array}}$$

$\forall A,B,C \in Ob\,\mathcal{A},\ f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,B),\ g \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$.

<u>Przykłady</u>: Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią zbiorów i $X_0 \in Ob\,\mathcal{S}$. Wtedy przyporządkowanie
$$Ob(\mathcal{S}) \ni X \longmapsto Map(X_0, X) \in Ob(\mathcal{S})$$

$\forall X,Y \in Ob\,\mathcal{S}: Map(X,Y) \ni f \longmapsto f_* \in Map(Map(X_0,X), Map(X_0,Y))$,

$f_*(\varphi) := f\circ\varphi$ definiuje <u>funktor kowariantny</u> z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}$. Podobnie, przyporządkowanie

$X \longmapsto Map(X, X_0)$, $f \longmapsto f^*$, $f^*(\varphi) = \varphi\circ f$,

definiuje <u>funktor kontrawariantny</u>.

Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią zwartych przestrzeni Hausdorffa a $\mathcal{C}$ kategorią C^*-algebr z jedynką. Przyporządkowanie

$$Ob(\mathcal{A}) \ni X \longmapsto C(X) \in Ob(\mathcal{C}),$$

$$Mor_{\mathcal{A}}(X,Y) \ni F \longmapsto F^* \in Mor_{\mathcal{C}}(C(Y), C(X)),$$

definiuje funktor kontrawariantny którego obrazem jest pełna podkategoria przemiennych C^*-algebr z 1-ą.

Twierdzenie: Niech G będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa której C^*-algebra $C(G)$ wyposażona jest w morfizm $\Delta : C(G) \longrightarrow C(G\times G)$ spełniający warunki:

①
$$\begin{tikzcd} C(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C(G\times G) \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ C(G\times G) \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & C(G\times G\times G) \end{tikzcd}$$
jest przemienny, gdzie

$$((\Delta\otimes id)(a))(g_1, g_2, g_3) := a\big((ev^{-1}\circ\Delta^*\circ ev)(g_1, g_2), g_3\big),$$

$$((id\otimes\Delta)(a))(g_1, g_2, g_3) := a\big(g_1, (ev^{-1}\circ\Delta^*\circ ev)(g_2, g_3)\big);$$

② Przestrzenie wektorowe $\mathrm{span}\{(a\otimes 1)\Delta(b) \mid a, b\in C(G)\}$ i $\mathrm{span}\{\Delta(a)(1\otimes b) \mid a, b\in C(G)\}$ (gdzie $(a\otimes 1)(g_1, g_2) := a(g_1)$, $(1\otimes b)(g_1, g_2) := b(g_2)$) są normowo gęste w $C(G\times G)$.

Wtedy G jest zwartą grupą Hausdorffa z działaniem $ev^{-1}\circ\Delta^*\circ ev$.