O ŚREDNIEJ STATYSTYCZNEJ

Ryszard Zieliński

XII Międzynarodowe Warsztaty dla Młodych Matematyków
Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka
Kraków, 20–26 IX 2009 r.

WYNIKI OBSERWACJI

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$$

WYNIKI OBSERWACJI

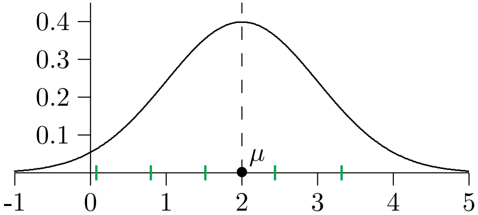
$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$$

Model statystyczny: $X_i = \mu + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

WYNIKI OBSERWACJI

$$X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n$$

Model statystyczny: $X_i = \mu + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

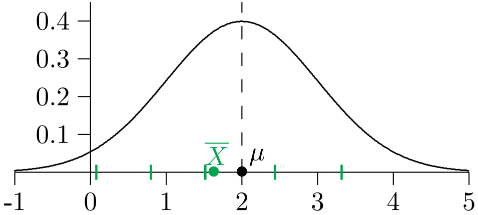


UŚREDNIENIE

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

UŚREDNIENIE

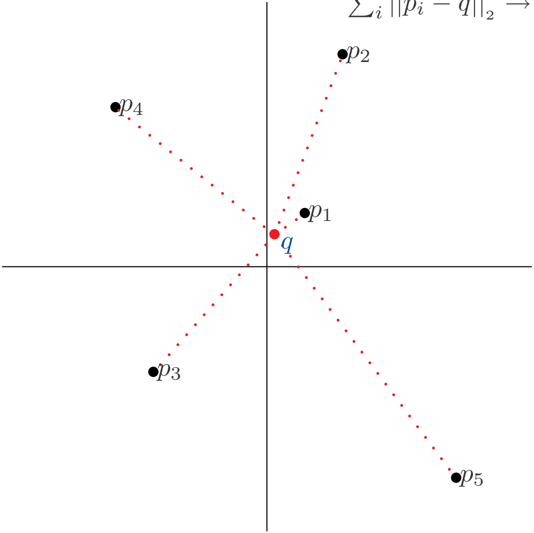
$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$



UZASADNIENIE

średnia $\overline{X}$ minimalizuje względem μ funkcję $\sum_{j=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

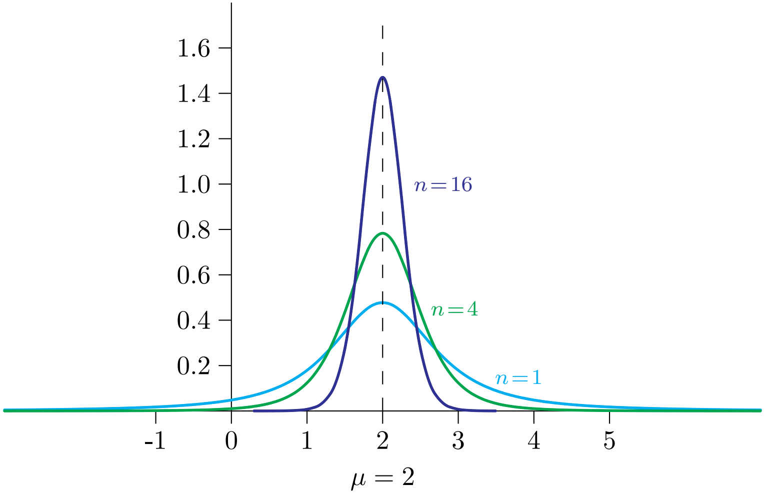
$$\sum_i ||p_i - q||_2^2 \rightarrow \min$$



astronomia, metrologia, geodezja, ...

ROZKŁAD NORMALNY $N(\mu, \sigma^2)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \Big\}$$


1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
$n=16$
$n=4$
$n=1$
-1
0
1
2
3
4
5
$\mu = 2$

Jak to się dzieje?

Funkcja charakterystyczna rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$:

$$\phi_X(t) = \exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$$

FUNKCJA CHARAKTERYSTYCZNA (*przypomnienie*)

zmiennej losowej X o rozkładzie z gęstością z dystrybuantą F:

$$\phi_X(t) = \int e^{itx} dF(x)$$

(*Transformata Fouriera rozkładu F*)

Dla stałej λ: $\phi_{\lambda X}(t) = \phi_X(\lambda t)$

Jeżeli X i Y są niezależne, to $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$

Funkcja charakterystyczna rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$:

$$\phi_X(t) = \exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$$

Funkcja charakterystyczna średniej $\overline{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j/n$:

$$\phi_{\overline{X}}(t) = \exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) t^2\}$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$:

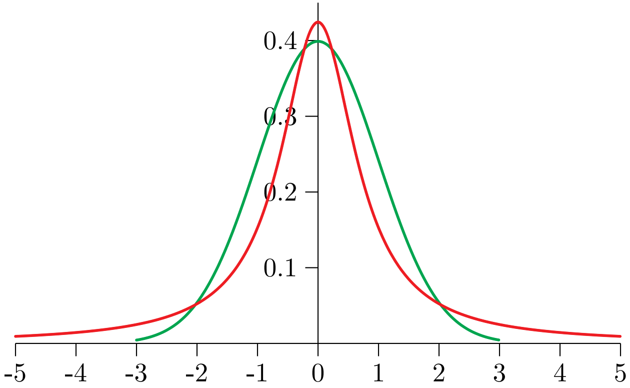
$$\phi_X(t) = \exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$$

Funkcja charakterystyczna średniej $\overline{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j / n$:

$$\phi_{\overline{X}}(t) = \exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) t^2\}$$

Inne rozkłady?

Rozkłady o trochę tłuściejszych ogonach:



TŁUSTE OGONY

- rozmiar finansowej odpowiedzialności ubezpieczyciela
w związku z wypadkami losowymi jego klientów przy ubezpieczeniu OC, AC oraz od wypadków przy pracy

TŁUSTE OGONY

- rozmiar finansowej odpowiedzialności ubezpieczyciela w związku z wypadkami losowymi jego klientów przy ubezpieczeniu OC, AC oraz od wypadków przy pracy

- wielkość plików przesyłanych w internecie

TŁUSTE OGONY

- rozmiar finansowej odpowiedzialności ubezpieczyciela
w związku z wypadkami losowymi jego klientów przy ubezpieczeniu OC, AC oraz od wypadków przy pracy

- wielkość plików przesyłanych w internecie

- pojemność złóż ropy naftowej

TŁUSTE OGONY

- rozmiar finansowej odpowiedzialności ubezpieczyciela
w związku z wypadkami losowymi jego klientów przy ubezpieczeniu OC, AC oraz od wypadków przy pracy

- wielkość plików przesyłanych w internecie

- pojemność złóż ropy naftowej

- rozmiary osiedli ludzkich

TŁUSTE OGONY

- rozmiar finansowej odpowiedzialności ubezpieczyciela w związku z wypadkami losowymi jego klientów przy ubezpieczeniu OC, AC oraz od wypadków przy pracy

- wielkość plików przesyłanych w internecie

- pojemność złóż ropy naftowej

- rozmiary osiedli ludzkich

- tzw. zwroty w operacjach giełdowych

ROZKŁAD CAUCHY'EGO (Lorenza, Breita-Wignera) $Ca(\mu, \lambda)$

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (y-\mu)^2}, \qquad G(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{y-\mu}{\lambda}$$

Funkcja charakterystyczna:

$$\phi_Y(t) = \exp\{i\mu t - |\lambda t|\}$$

ROZKŁAD CAUCHY'EGO (Lorenza, Breita-Wignera) $Ca(\mu, \lambda)$

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (y-\mu)^2}, \qquad G(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{y-\mu}{\lambda}$$

Funkcja charakterystyczna:

$$\phi_Y(t) = \exp\{i\mu t - |\lambda t|\}$$

Funkcja charakterystyczna średniej $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{n} Y_j / n$:

ROZKŁAD CAUCHY'EGO (Lorenza, Breita-Wignera) $Ca(\mu, \lambda)$

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (y-\mu)^2}, \qquad G(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{y-\mu}{\lambda}$$

Funkcja charakterystyczna:

$$\phi_Y(t) = \exp\{i\mu t - |\lambda t|\}$$

Funkcja charakterystyczna średniej $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{n} Y_j/n$:

$$\phi_{\overline{Y}}(t) = \exp\{i\mu t - |\lambda t|\}$$

ROZKŁAD CAUCHY'EGO

ROZKŁAD ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ Z PRÓBY
JEST TAKI SAM JAK

ROZKŁAD POJEDYNCZEJ OBSERWACJI

Ogólniej:

SYMETRYCZNE ROZKŁADY α-STABILNE

$$exp\{i\mu t - |\lambda t|^{\alpha}\}$$

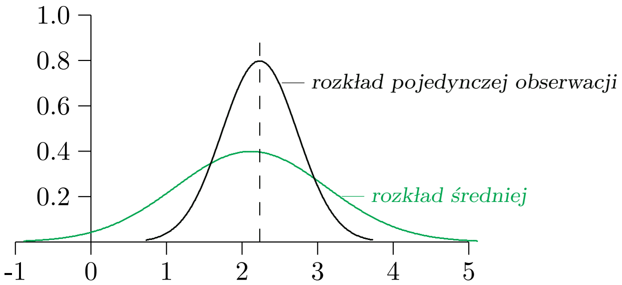
Ogólniej:

SYMETRYCZNE ROZKŁADY α-STABILNE

$$exp\{i\mu t - |\lambda t|^{\alpha}\}$$

$$\left(exp\{i\mu\frac{t}{n} - |\lambda\frac{t}{n}|^{\alpha}\}\right)^{n} = exp\{i\mu t - |n^{1/\alpha-1}\lambda t|^{\alpha}\}$$

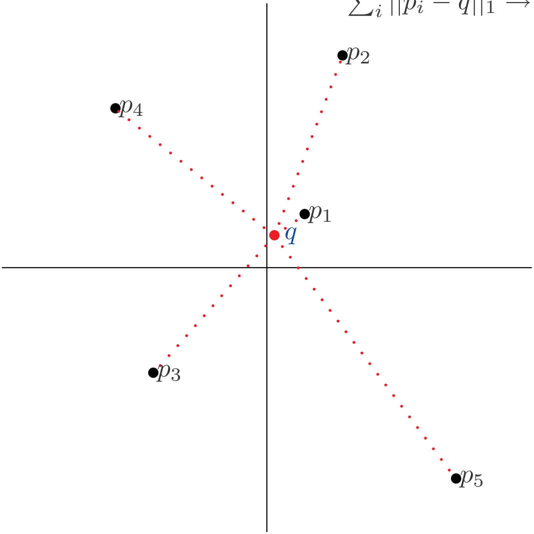
$\alpha=2$ – rozkład normalny; *$\alpha=1$ – rozkład Cauchy'ego*


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-1
0
1
2
3
4
5
rozkład pojedynczej obserwacji
rozkład średniej

MEDIANA

Mediana M minimalizuje względem μ funkcję $\sum_{j=1}^{n}|X_i - \mu|$

$\sum_i ||p_i - q||_1 \to \min$



MEDIANA

Próba: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Statystyki pozycyjne: $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$

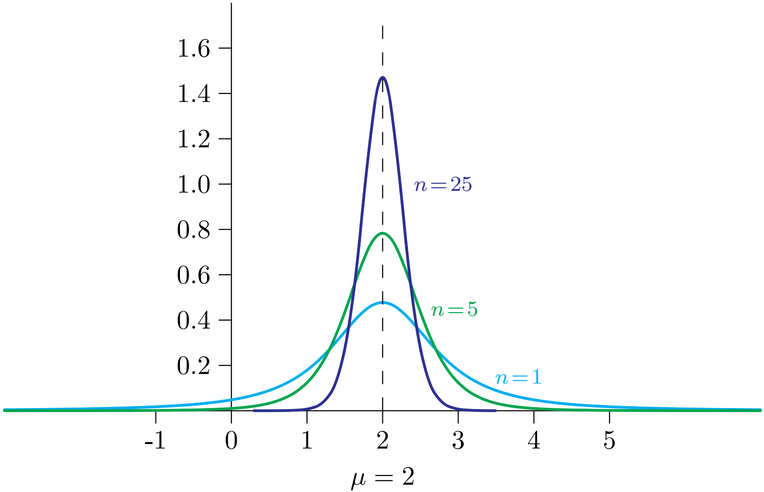
$$X_{1:n} \leqslant X_{2:n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}$$

MEDIANA

Wyniki obserwacji: $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{2n+1}$

Mediana z próby: $X_{n:2n+1}$

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\Big(F(x)[1-F(x)]\Big)^n f(x)$$


1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
n = 25
n = 5
n = 1
-1
0
1
2
3
4
5
μ = 2

Mediana z próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$M_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}\right), & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste,} \\ X_{[\frac{n+1}{2}]:n}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Efektywność mediany w rozkładzie $N(0,1)$

$$e(n) = \frac{Var(\overline{X}_n)}{Var(M_n)}$$

n	e(n)
1	1.000
2	1.000
3	0.743
4	0.838
5	0.697
6	0.776
7	0.679
8	0.743
9	0.669
10	0.723

Efektywność mediany w rozkładzie $U(0,1)$

n	e(n)
1	1.000
2	1.000
3	0.556
4	0.625
5	0.467
6	0.519
7	0.429
8	0.469
9	0.407
10	0.440

Obciążenie estymatora ?

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Ogólniej: liniowy estymator kwantyla rzędu q (L-statystyka)

$$c_1 X_{1:n} + c_2 X_{2:n} + \ldots + c_n X_{n:n}$$

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Ogólniej: liniowy estymator kwantyla rzędu q (L-statystyka)

$$c_1 X_{1:n} + c_2 X_{2:n} + \ldots + c_n X_{n:n}$$

Efektywne konstrukcje w modelach z parametrem położenia

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Ogólniej: liniowy estymator kwantyla rzędu q (L-statystyka)

$$c_1 X_{1:n} + c_2 X_{2:n} + \ldots + c_n X_{n:n}$$

Efektywne konstrukcje w modelach z parametrem położenia

Modele statystyczne z parametrem położenia:

$$X = \mu + \varepsilon, \quad \mu \text{ nieznane}, \quad \varepsilon \sim F, \; F \text{ znane}$$

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Ogólniej: liniowy estymator kwantyla rzędu q (L-statystyka)

$$c_1 X_{1:n} + c_2 X_{2:n} + \ldots + c_n X_{n:n}$$

Efektywne konstrukcje w modelach z parametrem położenia

Modele statystyczne z parametrem położenia:

$$X = \mu + \varepsilon, \quad \mu \text{ nieznane}, \quad \varepsilon \sim F, \; F \text{ znane}$$

Estymacja kwantyla ?

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Ogólniej: liniowy estymator kwantyla rzędu q (L-statystyka)

$$c_1X_{1:n} + c_2X_{2:n} + \ldots + c_nX_{n:n}$$

Efektywne konstrukcje w modelach z parametrem położenia

Modele statystyczne z parametrem położenia:

$$X = \mu + \varepsilon, \quad \mu \text{ nieznane}, \quad \varepsilon \sim F, \; F \text{ znane}$$

Estymacja kwantyla ? Niesymetryczne F,

Mediana z próby parzystej jest najczęściej definiowana jako średnia arytmetyczna dwóch środkowych obserwacji

Ogólniej: liniowy estymator kwantyla rzędu q (L-statystyka)

$$c_1 X_{1:n} + c_2 X_{2:n} + \ldots + c_n X_{n:n}$$

Efektywne konstrukcje w modelach z parametrem położenia

Modele statystyczne z parametrem położenia:

$$X = \mu + \varepsilon, \quad \mu \text{ nieznane}, \quad \varepsilon \sim F, \; F \text{ znane}$$

Estymacja kwantyla ? Niesymetryczne F, V@R

Liniowy estymator nieobciążony o minimalnej wariancji:

$$C = M^{-1}R\left(R^TM^{-1}R\right)^{-1}\begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} E_FX_{1:n} & 1 \\ \dots & \dots \\ E_FX_{n:n} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{i,j} = Cov_F(X_{i:n}, X_{j:n})$$

Liniowy estymator nieobciążony o minimalnej wariancji:

$$C = M^{-1}R\left(R^TM^{-1}R\right)^{-1}\begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} E_F X_{1:n} & 1 \\ \dots & \dots \\ E_F X_{n:n} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{i,j} = Cov_F(X_{i:n}, X_{j:n})$$

Minimalna wariancja:

$$Var_L(q,n) = \begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}^T \left(R^TM^{-1}R\right)^{-1}\begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Liniowy estymator nieobciążony o minimalnej wariancji:

$$C = M^{-1}R\left(R^TM^{-1}R\right)^{-1}\begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} E_FX_{1:n} & 1 \\ \dots & \dots \\ E_FX_{n:n} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{i,j} = Cov_F(X_{i:n}, X_{j:n})$$

Minimalna wariancja:

$$Var_L(q,n) = \begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}^T \left(R^TM^{-1}R\right)^{-1}\begin{pmatrix} F^{-1}(q) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Var_L(q,n+1) < Var_L(q,n) \qquad ???$$

Przykład:

Estymacja kwantyla rzędu q rozkładu normalnego:

$$(Var_{UMVU}(q,5), Var_L(q,5)) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2000, & 0.2000 \\ 0.2599, & 0.2607 \\ 0.4164, & 0.4190 \\ 0.9131, & 0.9215 \\ 1.4583, & 1.4732 \\ 2.0225, & 2.0440 \end{pmatrix} \text{dla } q = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$$

Przykład:

Estymacja mediany rozkładu Cauchy'ego:

$$c_3X_{3:n} + c_4X_{4:n} + \ldots + c_{n-2}X_{n-2:n}$$

Liniowy estymator nieobciążony o minimalnej wariancji:

$$C = M^{-1}R\left(R^TM^{-1}R\right)^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} E_FX_{3:n} & 1 \\ \ldots & \ldots \\ E_FX_{n-2:n} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{i,j} = Cov_F(X_{i:n}, X_{j:n})$$

"Duży model nieparametryczny":

rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach na prostej

"Duży model nieparametryczny":

rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach na prostej

Mediana z próby pochodzącej z rozkładu F jako estymator mediany $m(F)$ tego rozkładu

"Duży model nieparametryczny":

rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach na prostej

Mediana z próby pochodzącej z rozkładu F jako estymator mediany $m(F)$ tego rozkładu

Twierdzenie. Dla każdego $C > 0$ istnieje taki rozkład $F \in \mathcal{F}$, że

$$\left| Med_F\left(\frac{X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}}{2}\right) - m(F)\right| > C$$

"Duży model nieparametryczny":

rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach na prostej

Mediana z próby pochodzącej z rozkładu F jako estymator mediany $m(F)$ tego rozkładu

Twierdzenie. Dla każdego $C > 0$ istnieje taki rozkład $F \in \mathcal{F}$, że

$$\left| Med_F \left(\frac{X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}}{2} \right) - m(F) \right| > C$$

TWIERDZENIE JEST PRAWDZIWE DLA WSZYSTKICH NIETRYWIALNYCH L-STATYSTYK !

Duży model nieparametryczny $\mathcal{F}$

Rodzina wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach

Jeżeli X ma rozkład F z rodziny $\mathcal{F}$ i jeżeli $g : R^1 \rightarrow R^1$ jest przekształceniem monotonicznym, to zmienna losowa $g(X)$ też ma rozkład z rodziny $\mathcal{F}$

Duży model nieparametryczny $\mathcal{F}$

Rodzina wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach

Jeżeli X ma rozkład F z rodziny $\mathcal{F}$ i jeżeli $g : R^1 \to R^1$ jest przekształceniem monotonicznym, to zmienna losowa $g(X)$ też ma rozkład z rodziny $\mathcal{F}$

Jeżeli X ma rozkład $F \in \mathcal{F}$ z medianą $m(F)$ i jeżeli $g : R^1 \to R^1$ jest przekształceniem monotonicznym, to zmienna losowa $g(X)$ ma rozkład z medianą $g(m(F))$.

Duży model nieparametryczny $\mathcal{F}$

Rodzina wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach

Jeżeli X ma rozkład F z rodziny $\mathcal{F}$ i jeżeli $g : R^1 \to R^1$ jest przekształceniem monotonicznym, to zmienna losowa $g(X)$ też ma rozkład z rodziny $\mathcal{F}$

Jeżeli X ma rozkład $F \in \mathcal{F}$ z medianą $m(F)$ i jeżeli $g : R^1 \to R^1$ jest przekształceniem monotonicznym, to zmienna losowa $g(X)$ ma rozkład z medianą $g(m(F))$.

Jeżeli X ma rozkład $F \in \mathcal{F}$ z kwantylem $x_q(F)$ rzędu q i jeżeli $g : R^1 \to R^1$ jest przekształceniem monotonicznym, to zmienna losowa $g(X)$ rozkład z kwantylem rzędu q równym $g(x_q(F))$.

Postulat pod adresem estymatora mediany (kwantyla):

Jeżeli T jest nieobciążonym estymatorem mediany (kwantyla rzędu q) zmiennej losowej X, to $g(T)$ jest nieobciążonym estymatorem mediany (kwantyla rzędu q) zmiennej losowej $g(X)$

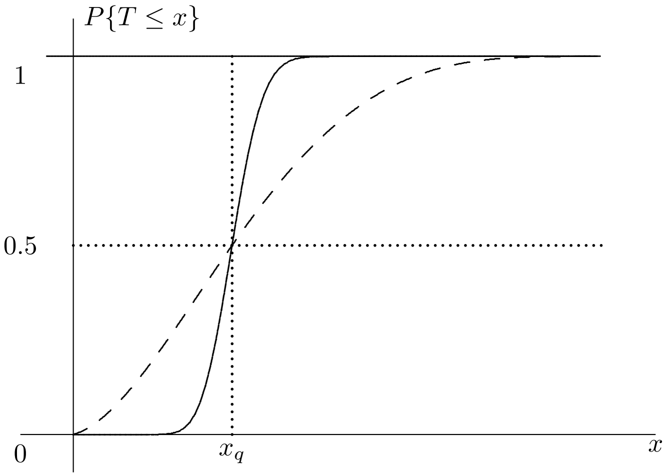
Postulat pod adresem estymatora mediany (kwantyla):

Jeżeli T jest nieobciążonym estymatorem mediany (kwantyla rzędu q) zmiennej losowej X, to $g(T)$ jest nieobciążonym estymatorem mediany (kwantyla rzędu q) zmiennej losowej $g(X)$

Nieobciążony ?

Estymacja kwantyla $x_q(F)$ rzędu q rozkładu F.

Konstrukcja medianowo nieobciążonego estymatora
o maksymalnej koncentracji:


$P\{T \leq x\}$
1
0.5
0
x_q
x

Definiujemy

$$\pi_k(q) = P_F\{X_{k:n} \leqslant x_q(F)\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j}$$

Wybieramy k takie, że $\pi_k(q) \geqslant \frac{1}{2} > \pi_{k+1}(q)$

Obliczamy $\lambda_k^* = \dfrac{\frac{1}{2} - \pi_{k+1}(q)}{\pi_k(q) - \pi_{k+1}(q)}$

Medianowo nieobciążony estymator o maksymalnej koncentracji ma postać

$$T^* = X_{J^*:n}, \qquad P\{J^* = k\} = \lambda_k^*, \quad P\{J^* = k+1\} = 1 - \lambda_k^*$$

Estymacja mediany ($q = 1/2$)

$$\pi_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}$$

$$\pi_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2m+1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}, & n = 2m \end{cases}$$

$$Estymator = \begin{cases} X_{m+1}, & n = 2m+1 \\ 1_{(0,0.5]}(R)X_m + 1_{(0.5,1)}(R)X_{m+1}, & n = 2m \end{cases}$$

$R \sim U(0,1)$

WNIOSKI:

WNIOSKI:

W modelu statystycznym $\{F_\mu(\cdot) = F(\cdot - \mu)\}$, na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymuj μ za pomocą:

WNIOSKI:

W modelu statystycznym $\{F_\mu(\cdot) = F(\cdot - \mu)\}$, na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymuj μ za pomocą:

Gdy $F = N(0, \sigma^2)$ – średniej arytmetycznej z próby

WNIOSKI:

W modelu statystycznym $\{F_\mu(\cdot) = F(\cdot - \mu)\}$, na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymuj μ za pomocą:

Gdy $F = N(0, \sigma^2)$ – średniej arytmetycznej z próby

Gdy $F \neq N(0, \sigma^2)$, ale F znane – pomyśl np o L-statystykach

WNIOSKI:

W modelu statystycznym $\{F_\mu(\cdot) = F(\cdot - \mu)\}$, na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymuj μ za pomocą:

Gdy $F = N(0, \sigma^2)$ – średniej arytmetycznej z próby

Gdy $F \neq N(0, \sigma^2)$, ale F znane – pomyśl np o L-statystykach

Gdy F nie jest znane, pomyśl o medianowo nieobciążonym estymatorze o maksymalnej koncentracji wokół μ

WNIOSKI:

W modelu statystycznym $\{F_\mu(\cdot) = F(\cdot - \mu)\}$, na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymuj μ za pomocą:

Gdy $F = N(0, \sigma^2)$ – średniej arytmetycznej z próby

Gdy $F \neq N(0, \sigma^2)$, ale F znane – pomyśl np o L-statystykach

Gdy F nie jest znane, pomyśl o medianowo nieobciążonym estymatorze o maksymalnej koncentracji wokół μ

ZAWSZE PRZED WYBOREM ESTYMATORA STARANNIE PRZEMYŚL WSZYSTKO CO WIESZ O ROZKŁADZIE. ZBYT POCHOPNE UŚREDNIANIE OBSERWACJI MOŻE POPSUĆ WNIOSKOWANIE

WNIOSKI:

W modelu statystycznym $\{F_\mu(\cdot) = F(\cdot - \mu)\}$, na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymuj μ za pomocą:

Gdy $F = N(0, \sigma^2)$ – średniej arytmetycznej z próby

Gdy $F \neq N(0, \sigma^2)$, ale F znane – pomyśl np o L-statystykach

Gdy F nie jest znane, pomyśl o medianowo nieobciążonym estymatorze o maksymalnej koncentracji wokół μ

ZAWSZE PRZED WYBOREM ESTYMATORA STARANNIE PRZEMYŚL WSZYSTKO CO WIESZ O ROZKŁADZIE. ZBYT POCHOPNE UŚREDNIANIE OBSERWACJI MOŻE POPSUĆ WNIOSKOWANIE

;)