O PEWNEJ NIERÓWNOŚCI DLA MEDIAN L-STATYSTYK

Ryszard Zieliński

IMPAN Warszawa
e-mail: R.Zielinski@impan.gov.pl

TWIERDZENIE.

Jeżeli $T = \sum_{j=k}^{m} \lambda_j X_{j:n}$ jest L-statystyką taką, że $\lambda_k > 0$, $\lambda_m > 0$, $k \leq m$, $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_m = 1$, to

$$(*) \qquad m(U_{k:n}) \leq Med\big(F, F(T)\big(\leq m(U_{m:n})$$

gdzie

$Med\big(F, S\big($ jest medianą rozkładu $S = S(X_1, \ldots, X_n)$, gdy próba $X_1, \ldots, X_n$ pochodzi z rozkładu F

oraz

$m(U_{j:n})$ jest medianą j-tej statystyki pozycyjnej $U_{j:n}$ z próby o liczności n z rozkładu jednostajnego $U(0, 1)$.

Granice w nierówności (*) są dokładne w tym sensie, że

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists F \in \mathcal{F})\ Med(F, F(T)) > m(U_{m:n}) - \varepsilon,$

$(\forall ta > 0)(\exists G \in \mathcal{F})\ Med(G, G(T)) < m(U_{k:n}) + \eta.$

$\mathcal{F}$ - rodzina wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach

DOWÓD:

Z nierówności $X_{k:n} \leq T \leq X_{m:n}$ mamy

$$U_{k:n} = F(X_{k:n}) \leq F(T) \leq F(X_{m:n}) = U_{m:n}$$

Osiągalność prawego ograniczenia:

Bierzemy rodzinę rozkładów $F_\alpha(x) = x^\alpha$, $0 < x < 1$, $\alpha > 0$.

$$X_{j:n} = F_\alpha^{-1}(U_{j:n}) = U_{j:n}^{1/\alpha}$$

$$\begin{aligned} F_\alpha(T) &= \Big(\lambda_k U_{k:n}^{1/\alpha} + \lambda_{k+1} U_{k+1:n}^{1/\alpha} + \ldots + \lambda_{m-1} U_{m-1:n}^{1/\alpha} + \lambda_m U_{m:n}^{1/\alpha}\Big)^\alpha \\ &= U_{m:n}\Big[\lambda_k \Big(\frac{U_{k:n}}{U_{m:n}}\Big)^{1/\alpha} + \lambda_{k+1}\Big(\frac{U_{k+1:n}}{U_{m:n}}\Big)^{1/\alpha} + \ldots \\ &\qquad + \lambda_{m-1}\Big(\frac{U_{m-1:n}}{U_{m:n}}\Big)^{1/\alpha} + \lambda_m\Big]^\alpha \end{aligned}$$

Gdy $\alpha \to 0$ to $F_\alpha(T) \to U_{m:n}$, więc $Med(F_\alpha, F_\alpha(T)) \to m(U_{m:n})$.

Osiągalność prawego ograniczenia: $G_\alpha(x) = 1 - (1-x)^\alpha$

$\square$

WNIOSEK.

Jeżeli L-statystyka

$$\boldsymbol{T = \sum_{j=k}^{m} \lambda_j X_{j:n}}$$

$$\boldsymbol{k < m,\ \lambda_k > 0,\ \lambda_m > 0,\ \lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_m = 1}$$

$$\boldsymbol{\lambda_j = \lambda_j(q),\ j = k, \ldots, m}$$

jest estymatorem $\boldsymbol{q}$-ego kwantyla $\boldsymbol{x_q(F)}$ pewnego nieznanego rozkładu $\boldsymbol{F \in \mathcal{F}}$, to błąd estymacji może być dowolnie duży w tym sensie, że

$\boldsymbol{(\forall C > 0)(\exists F \in \mathcal{F})}$

$$\boldsymbol{|Med(F,T) - x_q(F)| > C}$$

DOWÓD

Mamy

$$\frac{1}{2} = P_F\{T \leq Med(F,T)\} = P_F\{F(T) \leq F(Med(F,T)\}$$

czyli

$$Med(F, F(T)) = F(Med(F,T)).$$

Z Twierdzenia

$$(*) \qquad m(U_{k:n}) \leq Med\big(F, F(T)\big(\leq m(U_{m:n})$$

czyli

$$F^{-1}\big(m(U_{k:n})\big(\leq Med(F,T) \leq F^{-1}\big(m(U_{m:n})\big($$

oraz

$$F^{-1}\big(m(U_{k:n})\big(-x_q(F) \leq Med(F,T) - x_q(F) \leq F^{-1}\big(m(U_{m:n})\big(-x_q(F).$$

Dla $k < m$ mamy $m(U_{k:n}) < m(U_{m:n})$ więc $F^{-1}\big(m(U_{k:n})\big(-x_q(F)$ może być dowolnie małe oraz $F^{-1}\big(m(U_{m:n})\big(-x_q(F)$ może być dowolnie duże. Ograniczenia są osiągalne, więc $|Med(F,T) - x_q(F)|$ może być dowolnie duże. $\square$

ILUSTRACJA NUMERYCZNA (symulacje)

ESTYMATORY:

Davis and Steinberg (1986)

$$X_{(n+1)/2:n}, \quad \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste;}$$

$$\big(X_{n/2:n} + X_{n/2+1:n}\big(/2, \quad \text{gdy } n \text{ jest parzyste}$$

Harrell and Davis (1982)

$$HD = \frac{n!}{[(\frac{n-1}{2})!]^2} \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{(j-1)/2}^{j/n} [u(1-u)]^{(n-1)/2} du \right] X_{j:n},$$

Kaigh and Cheng (1991) dla n nieparzystych

$$KC = \frac{1}{\big(\begin{smallmatrix} 2n-1 \\ n \end{smallmatrix}\big(} \sum_{j=1}^{n} \binom{\frac{n-3}{2} + j}{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{3n-1}{2} - j}{\frac{n-1}{2}} X_{j:n}.$$

ROZKŁADY:

Pareto

$$1 - \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x > 1, \quad \text{tłuste ogony, nie ma momentów rzędu } k \geq \alpha,$$

Potęgowy (Beta)

$$x^{\alpha}, \quad x \in (0,1), \quad \text{bez ogonów, wszystkie momenty },$$

Wykładniczy

$$1 - Exp\{-\alpha x\}, \quad x > 0, \quad \text{bardzo regularny },$$

$n = 9,\ sym = 9,999$

Distribution	Mediana	HD	KC	$\frac{X_{5:10}+X_{6:10}}{2}$
Pareto				
$\alpha = 1/2$	4	7.72	13.71	4.13
$\alpha = 1/4$	16	255	1107	18.45
$\alpha = 1/8$	256	3.3×10^6	2.8×10^7	383
Power				
$\alpha = 1/2$	0.25	0.2780	0.2919	0.2535
$\alpha = 1/4$	0.0625	0.1055	0.1286	0.0692
$\alpha = 1/8$	0.0039	0.0241	0.0432	0.0053
Exponential				
$\alpha = 1/2$	1.3863	1.5138	1.6235	1.4079
$\alpha = 1/4$	2.7726	3.0571	3.2731	2.8036
$\alpha = 1/8$	5.5452	6.0595	6.4897	5.6143