Modele
Domara i Solowa
wzrostu gospodarczego

Model Domara

- Służy do rozstrzygnięcia kwestii wielkości inwestycji I(t) w dowolnej chwili t.
- Przewiduje uzależnienie inwestycji I(t) od dochodu narodowego Y(t) w chwili t.
- Inwestycje wpływają na dochód narodowy w przyszłości.
- Zwiększenie inwestycji δI zależy od przyrostu dochodu narodowego δY.

Zależności ekonomiczne między I(t) i Y(t):

1. $s\delta Y = \delta I$
2. Zależność szybkości wzrostu inwestycji od szybkości wzrostu gospodarczego:

$$s\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt} \qquad (1)$$

s- stała oznaczająca krańcowa skłonność do oszczędzania.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- k(t) - największy produkt narodowy, jaki możemy wytworzyć w chwili t (potencjał produkcyjny),
- K(t) - maksymalny kapitał możliwy do wytworzenia w chwili t (produkt narodowy).

Potencjał produkcyjny związany jest z kapitałem następująco :

$$\rho K(t) = k(t)$$

gdzie ρ - współczynnik proporjonalności.

Stąd, biorąc pod uwagę, że stopa przyrostu kapitału ($\frac{dK}{dt}$) jest równa inwestycjom mamy:

$$\frac{dk}{dt} = \rho \frac{dK}{dt} = \rho I \qquad (2)$$

Załóżmy pełne wykorzystanie mocy produkcyjnych, czyli równowagę gospodarki, która wyrażona jest wzorem:

$$Y(t) = k(t) \qquad (3)$$

Korzystając z równań (1), (2),(3) otrzymujemy:

$$\left.\begin{array}{l} s\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt} \\ \frac{dk}{dy} = \rho\frac{dK}{dt} = \rho I \\ Y(t) = k(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dt} = s\frac{dY}{dt} = s\frac{dk}{dt} = \rho s I$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{dI}{dt} = \rho s I \Longrightarrow \frac{1}{I} dI = \rho s \, dt$$

$$\int \frac{1}{I} \, dI = \int \rho s \, dt$$

$$\log I = \rho s + \text{const}$$

Rozwiązanie równania: $I(t) = Ae^{\rho s t}$ A – stała

Jeśli początkową wielkością inwestycji jest $I(0)$ to:

$$I(0) = Ae^{0} = 0 \Longrightarrow I(t) = I(0)e^{\rho s t}$$

Zatem inwestycje muszą rosnąć wykładniczo.

Paradoks

Przypuśćmy, że wzrost gospodarczy rośnie wykładniczo ze stopą τ $(\tau > 0)$ inną niż ρs.

Z równania (2) $\frac{dk}{dy} = \rho \frac{dK}{dt} = \rho I$ możemy policzyć, że:

$$I(t) = I(0)e^{\tau t}$$

Stąd $\frac{dk}{dt} = \rho\, I(0)e^{\tau t}$

Całkując od zera do t otrzymujemy:

$$k(t) - k(0) = \rho I(0)\frac{e^{\tau t} - 1}{\tau}$$

Analizując równanie (1) $s\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt}$ mamy:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}$$

Co po scałkowaniu daje:

$$Y(t) - Y(0) = \frac{I(t) - I(0)}{s} = \frac{I(0)}{s}(e^{\tau t} - 1)$$

„Współczynnik wykorzystania mocy produkcyjnych” obliczymy jako:

$$w(t) = \frac{Y(t)}{k(t)} = \frac{Y(0) + \left({}^{1}/_{s}\right) I(0)(e^{\tau t} - 1)}{k(0) + \left({}^{\rho}/_{\tau}\right) I(0)(e^{\tau t} - 1)}$$

dąży on do $\tau/\rho s$ przy $t \to \infty$.

Gdy $w = 1$ osiągamy pełne wykorzystanie mocy produkcyjnych.

Rozważmy możliwości:

- $\tau > \rho s$ - po pewnym czasie $Y(t) > k(t)$, w gospodarce jest niedobór mocy produkcyjnych.
- $\tau < \rho s$ - prowadzi do nadmiaru mocy produkcyjnych.

Model Solowa

Niech: K(t) – kapitał

L(t) – praca w chwili t

<u>Funkcja produkcji:</u>

Y(t)= F(K(t), L(t)) , gdzie K(t), L(t)>0

Funkcja produkcji musi spełniać kilka warunków:

- Pierwsze pochodne po kapitale i po pracy muszą być dodatnie.
- Drugie pochodne po kapitale i po pracy muszą być ujemne.

$\Rightarrow$ dodatnie produkty krańcowe i malejące przychody dla każdego czynnika

- Funkcja musi być liniowo jednorodna, czyli:

$$F(\mu K(t), \mu L(t)) = \mu F\big(K(t), L(t)\big) \qquad \mu > 0$$

Biorąc $\mu = L^{-1}$ otrzymujemy:

$$F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = \frac{F\big(K(t), L(t)\big)}{L(t)} \quad | * \; L(t)$$

$$F\big(K(t), L(t)\big) = L(t)F\left({}^{K(t)}\!/_{L(t)}, 1\right)$$

Nakład pracy rośnie w sposób wykładniczy:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \lambda L(t) \qquad \lambda > 0$$ -stała stopa wzrostu siły roboczej

Inwestycje stanowią stałą część s wytworzonego produktu narodowego (ozn. Y(t)): $\frac{dK(t)}{dt} = I = sY(t)$

Analiza:

k(t) - zasób kapitału na jednostkę pracy

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

Niech $$\varphi(k(t)) = F(k(t), 1) = F\left({}^{K(t)}/_{L(t)}, 1 \right)$$

Wtedy funkcja produkcji przyjmie postać:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = L(t)F\left({}^{K(t)}/_{L(t)}, 1 \right) = L\varphi(k(t))$$

$$Y(t) = L\varphi(k(t))$$

Jeżeli przez $y(t)$ oznaczymy produkt na jednostkę pracy to:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} \Rightarrow y(t) = \varphi(k(t))$$

Ponieważ K=kL więc:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dk}{dt}L + k\frac{dL}{dt} = \frac{dk}{dt}L + k\lambda L$$

Z drugiej strony: $\frac{dK}{dt} = sY(t) = sL\varphi(k)$, więc

$$sL\varphi(k) = \frac{dk}{dt}L + k\lambda L \;\; | \div L$$

Otrzymujemy równanie Solowa:

$$s\varphi(k) = \frac{dk}{dt} + k\lambda$$

Za F przyjmijmy funkcję produkcji Cobba-Douglasa $(F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha})$.

Wtedy $\varphi(k) - k^{\alpha}$. $0 < \alpha < 1$

Równanie Solowa przyjmuję postać : $\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha} - \lambda k$

Sprowadzamy równanie do prostszej postaci:

$$k^{-\alpha}\frac{dk}{dt} + \lambda k^{1-\alpha} = s$$

Podstawiamy $z = k^{1-\alpha}$,

$$\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\frac{dk}{dt}$$

$$\frac{1}{1 \quad \alpha}\frac{dz}{dt} + \lambda z = s \ | \ \times (1-\alpha)$$

$$\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)\lambda z = s(1-\alpha)$$

Obie strony mnożymy przez czynnik całkujący: $e^{(1-\alpha)\lambda t}$

Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$e^{(1-\alpha)\lambda t}\frac{dz}{dt}+z(1-\alpha)\lambda e^{(1-\alpha)\lambda t}=s(1-\alpha)e^{(1-\alpha)\lambda t}$$

Czyli, $\frac{d}{dt}(ze^{(1-\alpha)\lambda t})=s(1-\alpha)e^{(1-\alpha)\lambda t}$

$$ze^{(1-\alpha)\lambda t}=s(1-\alpha)\frac{e^{(1-\alpha)\lambda t}}{(1-\alpha)\lambda}+c$$

$$k^{1-\alpha}=\frac{s}{\lambda}+ce^{(1-\alpha)\lambda t}$$

W celu znalezienia c podstawiamy t=0.

$$k(0)^{1-\alpha}=\frac{s}{\lambda}+c$$

$$k(t)^{1-\alpha}=\frac{s}{\lambda}+\left[k(0)^{(1-\alpha)}-\frac{s}{\lambda}\right]e^{-(1-\alpha)\lambda t}$$

Gdy $0<\alpha<1$ oraz $\lambda>0$

$$\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha}\to\frac{s}{\lambda}\qquad\frac{K(t)}{L(t)}\to\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{1/1-\alpha}\qquad t\to\infty$$

Literatura:

- Adam Ostoja-Ostaszewski - „Matematyka w ekonomii 2 Modele i Metody”.
- Stanisława Kanast - „Podstawy ekonomii matematycznej”.