

MODEL KOŁOMOGOROWA I MODEL MAYA

Marek Błazewicz

Model Kołmogorowa

- jest to model ogólny, model Maya będzie jego przykładem

- wzór ogólny modeli dwóch populacji:

$$\begin{cases} \dot{V} = F(V, P)V \\ \dot{P} = G(V, P)P \end{cases}$$

gdzie F i G są funkcjami dwóch zmiennych (V, P) i posiadają kilka współczynników z interpretacją biologiczną.

np. dla Lotki - Voltery były to funkcje:

$$F = r - aP$$

$$G = -s + abV$$

Najważniejsze założenia modelu Kołmogorowa:

1. Wraz ze wzrostem liczby drapieżników przyrost liczby ofiar maleje:

$$\frac{\partial F}{\partial P} < 0$$

2. Wzrost liczby drapieżników hamuje ich przyrost:

$$\frac{\partial G}{\partial P} < 0$$

$$3. \quad V \frac{\partial F}{\partial V} + P \frac{\partial F}{\partial P} < 0$$

$$4. \quad V \frac{\partial G}{\partial V} + P \frac{\partial G}{\partial P} > 0$$

(warunki "techniczne")

5. Kiedy ilość obu gatunków jest niewielka, wzrasta liczba ofiar:

$$F(0,0) > 0$$

6. Warunki na stałe:

I. Istnieje takie zagęszczenie drapieżników α , przy którym liczba ofiar przestaje przyrastać:

$$F(0, \alpha) = 0$$

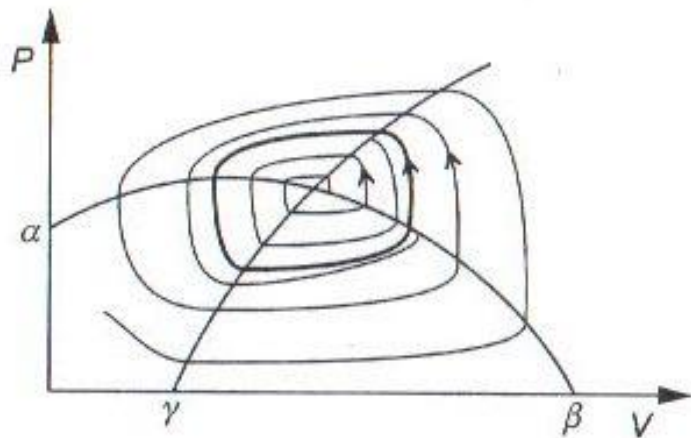
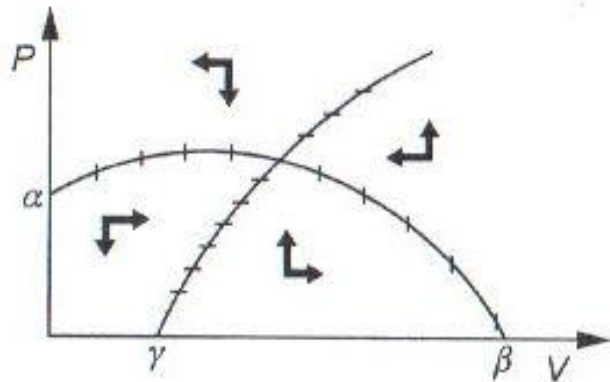
II. Istnieje takie zagęszczenie ofiar, które hamuje ich przyrost (ograniczona pojemność środowiska):

$$F(\beta, 0) = 0$$

III. Istnieje takie zagęszczenie ofiar γ , przy którym ilość drapieżników przestaje przyrastać.

$$G(\gamma, 0) = 0$$

(drapieżniki nie mają dość pożywienia by zaspokoić potrzeby rosnącej populacji)



Wszystkie wymienione założenia gwarantują istnienie rozwiązań: jednoznacznych i nieujemnych (przy nieujemnych warunkach początkowych). Jak wyglądają rozwiązania, zależy od doboru funkcji F i G .

Rozwiązanie takie może być stabilne, wtedy po pewnym czasie populacja stabilizuje się. Oczywiście "pewien czas" to pojęcie względne.

Jednak kiedy jest niestabilne, w tym modelu powstaną cykle graniczne, jak na rysunku.

W pewnym sensie, punkt stabilny jest takim cyklem granicznym, tylko o zerowych oscylacjach.

Model Lotki-Voltery nie spełnia założeń modelu Kołmogorowa.

MODEL MAYA

Model powstał dzięki zauważeniu, że nierówności z założeń modelu Kołmogorowa można zamienić na nieostre.

Wzór:

$$\begin{cases} \dot{V} = r_1 V \left(1 - \frac{V}{K_1}\right) - a \frac{VP}{1 + aV} \\ \dot{P} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{VK_2}\right) \end{cases}$$

gdzie:

r_1, r_2 - współczynniki rozrodczości, odpowiednio ofiar i drapieżników

a - współczynnik skuteczności polowań

K_1, K_2 - maksymalne pojemności środowiska

Zmiany:

a) funkcja opisująca śmiertelność ofiar na skutek polowań: liczba ofiar, które jeden drapieżnik może upolować, jest ograniczona: poluje gdy jest głodny, nie poluje ponad potrzeby lub na zapas:

$$aP \rightarrow a \frac{P}{1+aV}$$

Jak widać, dla małych V wygląda to jak u Lotki-Voltery

b) uwzględnia się pojemność środowiska dla ofiar:

$$V \rightarrow V \left(1 - \frac{V}{K_1}\right)$$

c) Zmiana w liczebności drapieżników: równanie typu logistycznego, pojemność środowiska nie jest stała, tylko zależy od liczebności ofiar, co wydaje się logiczne.

$$-s + abV \rightarrow r_2 \left(1 - \frac{P}{VK_2}\right)$$

Analiza punktów krytycznych, czyli rozwiązań równania:

$$\begin{cases} 0 = r_1 V \left(1 - \frac{V}{K_1}\right) - a \frac{VP}{1 + aV} \\ 0 = r_2 P \left(1 - \frac{P}{VK_2}\right) \end{cases}$$

Macierz Jacobiego:

$$J = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - 2\frac{V}{K_1}\right) - a \frac{P}{(1 + aV)^2}; & -a \frac{V}{1 + aV} \\ r_2 \frac{P^2}{K_2 V^2}; & r_2 \left(1 - 2\frac{P}{VK_2}\right) \end{bmatrix}$$

I. W punkcie (0,0) równanie nie jest określone, więc w jego otoczeniu zastępujemy je prostszym:

$$\begin{cases} \dot{V} = r_1 V \\ \dot{P} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{VK_2}\right) \end{cases}$$

i po rozwiązaniu otrzymujemy siodło-węzeł.

II. $(K_1, 0)$: siodło, oś V jest separatrycą ściągającą

$$J(K_1, 0) = \begin{bmatrix} -r_1; & -a \frac{r_1}{1 + ar_1} \\ 0; & r_2 \end{bmatrix}$$

$$\det J(K_1, 0) < 0$$

III. W końcu punkt trzeci: (V^*, P^*)

$$J(K_1, 0) = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - 2\frac{V^*}{K_1}\right) - a \frac{K_2 V^*}{(1 + aV^*)^2}; & -a \frac{V^*}{1 + aV^*} \\ r_2 V^*; & -r_2 \end{bmatrix}$$

$$\det J > 0$$

$$\text{tr } J = r^* - r_2,$$

$$\text{gdzie } r^* = r_1 \left(1 - 2\frac{V^*}{K_1}\right) - a \frac{K_2 V^*}{(1 + aV^*)^2}$$

Więc charakter tego punktu zależy od $\text{tr } J$.

a) punkt hiperbolicznie stabilny, czyli $tr J = r^* - r_2 < 0$

I otrzymujemy punkt hiperbolicznie stabilny.

b) punkt niestabilny

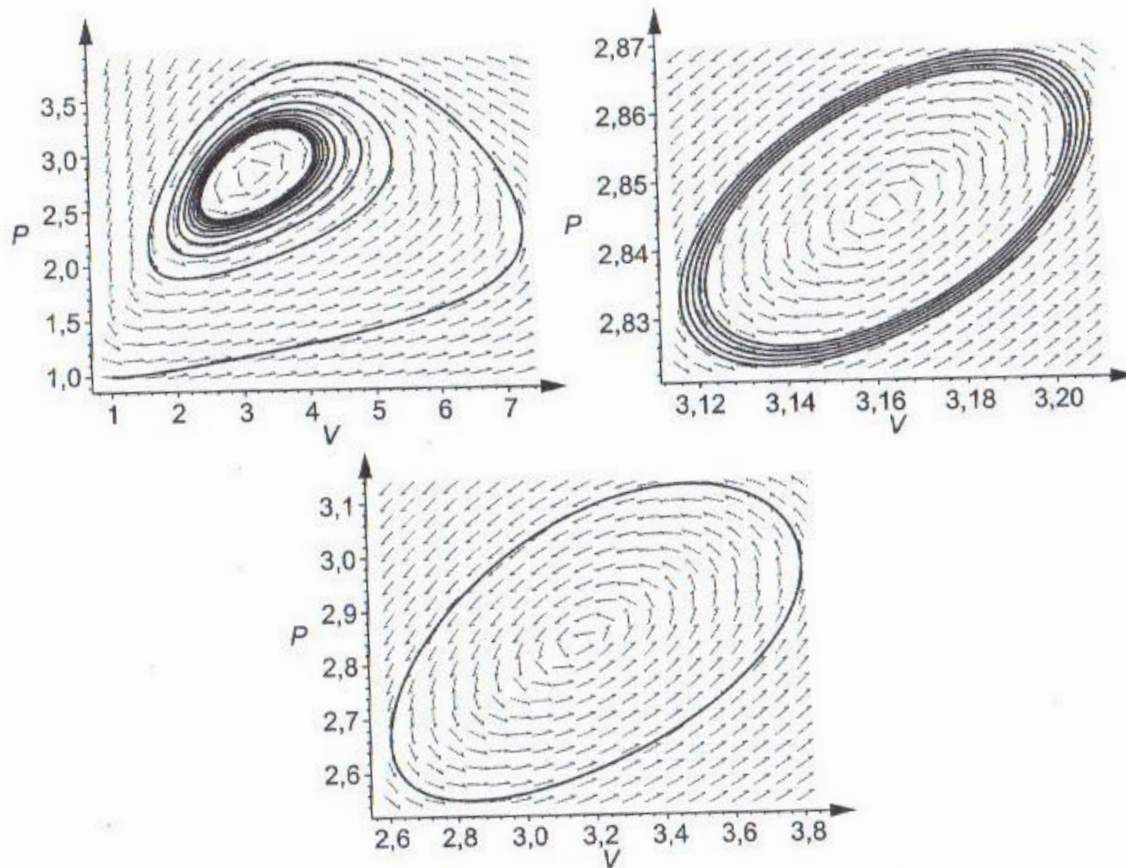
$$tr J = r^* - r_2 > 0$$

Wtedy otrzymujemy cykl graniczny.

c) $tr J = r^* - r_2 \rightarrow 0$

Wtedy wartości własne J są zespolone. Analiza tej sytuacji dowodzi, że cykl graniczny przyciąga trajektorie także od wewnątrz.

Dlaczego (w skrócie): punkt przyciąga trajektorie, ale w pewnym momencie, przy przejściu przez cykl graniczny, zaczyna je odpychać.



Rysunek 2.13. Portrety fazowe modelu Maya w przypadku cyklu granicznego: u góry z lewej – orbita nawija się na cykl graniczny od zewnątrz, z prawej – od wewnątrz, u dołu – cykl graniczny

Na rysunkach widzimy te trzy sytuacje.

Założenia z modelu Kołmogorowa:

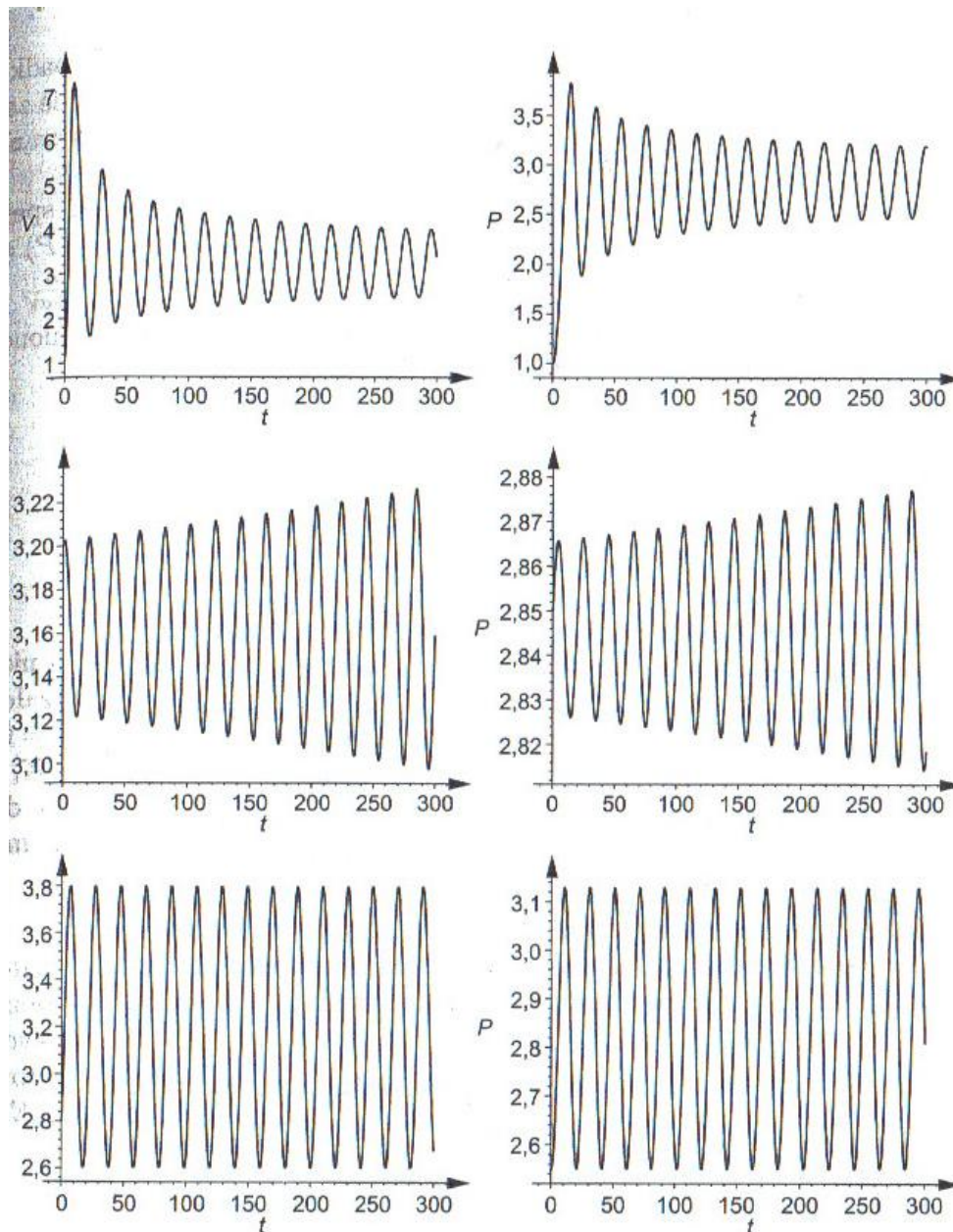
Niespełnione:

$$V \frac{\partial G}{\partial V} + P \frac{\partial G}{\partial P} > 0$$

(mamy tu równość)

Nie jest spełnione też założenie o istnieniu γ , gdyż

$$G(V, 0) = r_2$$



Problem z zastosowaniem modelu w symulacjach.

- Czy istnieją tylko drapieżnicy i ofiary? (oczywiście, że nie)

rysunek 2.14. Wykresy rozwiązań modelu Maya odpowiadające portretom fazowym z rys. 2.13

Dziękuję za uwagę

Źródła:

U. F o r y ś, Matematyka w biologii, WNT, Warszawa 2005

A. P a l c z e w s k i, Równania różniczkowe zwyczajne, WNT, Warszawa 1999