Modele cyklu ekonomicznego

Prezentacja licencjacka

Piotr Winiarski
pod kierunkiem dr Sławomira Michalika

03/06/2013

Obserwacje rozwiniętych gospodarek wolnorynkowych wykazują, że nie występują w nich stany stacjonarne, typowe są natomiast pewne zjawiska okresowe, które ekonomiści nazwali cyklami ekonomicznymi. Chciałbym Państwu przybliżyć tu dwa z tych modeli, które wykazują cechy cykliczności.

Na wstępie wprowadźmy oznaczenia:

- Y - wielkość dochodu
- C - konsumpcja
- K - kapitał dostępny w gospodarce
- R - kapitał wymagany

Rozważmy równanie bilansu (równowagi)

$$Y = C + \dot{K} \tag{1}$$

uzupełnijmy je o nieco bardziej złożonym równaniem konsumpcji

$$C = \beta + \alpha Y \tag{2}$$

To równanie uwzględnia fakt, że konsumpcja składa się z cześci stałej β niezależnej od poziomu dochodów, oraz z części proporcjonalej do wielkości dochodów ze stałą propocjonalności α. Uwzględnijmy fakt, że produkcja wymaga wkładu własnego.

Niech $R(t)$ będzie kapitałem wymaganym do osiągnięcia zadanego poziomu dochodów, przy czym załóżmy prostą zależność

$$R = \kappa Y \qquad (3)$$

gdzie κ jest stałą. Stan równowagi osiągniemy gdy kapitał wymagany będzie równy kapitałowi dostępnemu w gospodarce. Kiedy tak nie jest to następują procesy dostawcze (zwiększające poziom dostępnego kapitału lub zmniejszające go)

Określmy przepływ kapitału za pomocą funkcji schodkowej

$$\dot{K} = \begin{cases} k_1 > 0, & \text{gdy} \quad K < R, \\ 0, & \text{gdy} \quad K = R, \\ -k_2 < 0, & \text{gdy} \quad K > R. \end{cases} \tag{4}$$

Przyczym zachodzi relacja $k_1 > k_2$, ponieważ z ekonomicznego punktu widzenia szybciej dokonuje się nowych inwestycji niż amortyzacji.

Z równań (1) - (4) otrzymamy wyrażenie na kapitał wymagany

Do

$$Y = C + \dot{K}$$

podstawiamy

$$C = \beta + \alpha Y$$

i otrzymamy

$$Y = \beta + \alpha Y + \dot{K}$$

podstawiamy

$$Y = \frac{R}{\kappa}$$

i otrzymujemy

$$\frac{R}{\kappa} = \beta + \alpha \frac{R}{\kappa} + \dot{K} / \cdot \kappa$$

dostaliśmy

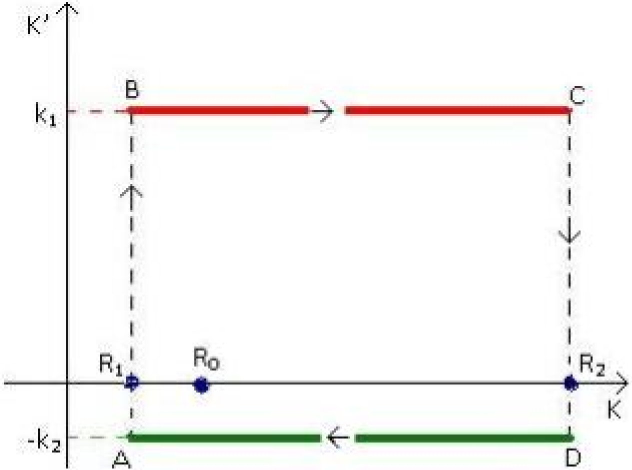
$$(1 - \alpha)R = \beta\kappa + \kappa\dot{K}$$

ostatecznie otrzymaliśmy

$$R = \frac{\kappa}{1-\alpha}\dot{K} + \frac{\kappa\beta}{1-\alpha}$$

Oznacza to, że kapitał ten przyjmuje tylko trzy wartości

$$R = \begin{cases} R_1, & \text{gdy} \quad K < R, \\ R_0, & \text{gdy} \quad K = R, \\ R_2, & \text{gdy} \quad K > R. \end{cases}$$



Rysunek : Portret fazowy przebiegu zmienności dostępnego kapitału (strzałkami zaznaczony jest kierunek ewolucji)

Zauważmy, że punkt R_0 będący punktem równowagi układu ($R = K$) jest niestabilny. Małe zaburzenie wytrąca układ z położenia i przesuwa go na krzywą zamkniętą $ABCD$.
Jeśli układ jest w punkcie $K = R_0$ i zwiększymy dostępny kapitał o ΔK, to układ znajdzie się w punkcie $K = R_0 + \Delta K$, gdzie $K > R$, więc $\dot{K} = -k_2$, czyli spadnie na odcinek DA.
Spójrzmy, jak w rozważanym modelu zmienia się wielkość produktu globalnego. Z równań (1) - (4) otrzymujemy:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\beta + k_1}{1-\alpha}, & t \in (nt_1, nt_1 + t_2), \\ \frac{\beta - k_2}{1-\alpha}, & t \in (nt_1 + t_2, (n+1)t_1). \end{cases} \tag{5}$$

$$t_1 = \frac{\kappa}{1-\alpha} \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2}, \quad t_2 = \frac{\kappa}{1-\alpha} \frac{k_1 + k_2}{k_1}$$

Ze wzoru (5) widać cykliczność produktu całkowitego. Jednak nasz model ma kilka wad:

- Y zmienia się skokowo, co nie zachodzi w rzeczywistości.
- okresy wzrostu gospodarczego i recesji są proporcjonalne do odpowiednio $\frac{1}{k_1}$ i $\frac{1}{k_2}$ skąd, w sprzeczności z rzeczywistością wynika, że okres wzrostu jest krótszy od okresu recesji $(k_1 > k_2)$, co nie jest zgodne z rzeczywistością.

Aby otrzymać model ekonomiczny lepiej odpowiadający rzeczywistym przemianom w gospodarce, wprowadźmy kilka modyfikacji. Tak jak poprzednio, punktem wyjścia będzie równanie bilansu (1) oraz nieco zmienione równanie konsumpcji

$$C(t) = \alpha Y(t - \tau) \tag{6}$$

Z równania (6) wynika, że bieżąca konsumpcja zależy od dochodów osiągniętych nieco wcześniej. Dla uproszczenia przyjmuję, że konsumpcja nie składa się z części stałej, a składa się z części proporcjonalnej do wielkości dochodów ze stałą proporcjonalności α W ekonomii przyjmuje się zależność zwaną regułą akceleracji (wzrost popytu powoduje wzrost inwestycje co następnie powoduje przyśpieszenie wzrostu gospodarczego)

$$\dot{K} = \alpha \dot{Y} \tag{7}$$

Powyższe równanie może być spełnione jedynie w stanie równowagi. Postuluję, że dynamika osiągania tego stanu jest opisana równaniem:

$$\frac{d}{dt}\dot{K} = b(\alpha \dot{Y} - \dot{K}) \tag{8}$$

W celu otrzymania zamkniętego modelu z równań (1), (6), (8) postępujemy następująco. Prawą stronę równania (6) rozwijamy w szereg Taylora względem τ i zakładając, że τ jest małe, pomijamy wyrazy wyższego rzędu. Wtedy

$$C(t) = \alpha Y(t) - \tau\alpha \dot{Y}(t) + O(\tau^2).$$

Wstawiając te wyrażenie do (1) otrzymujemy

$$Y = \alpha Y - \tau\alpha \dot{Y} + \dot{K} \tag{9}$$

Różniczkujemy (9) i korzystam z (8) i dostajemy

$$\dot{Y} = \alpha\dot{Y} - \tau\alpha\ddot{Y} + \ddot{K} = \alpha\dot{Y} - \tau\alpha\ddot{Y} + b\alpha\dot{Y} - b\dot{K}$$

Do ostatniego równania wstawiamy $\dot{K}$ z (9), porządkujemy wyrazy i otrzymujemy

$$\tau\alpha\ddot{Y}+(1-\alpha-b\alpha+b\tau\alpha)\dot{Y}+b(1-\alpha)Y=0 \tag{10}$$

Równanie (10) jest równaniem oscylatora harmonicznego z tłumieniem w którym częstość własna jest określona wyrażeniem

$$\omega_0^2=\frac{b(1-\alpha)}{\tau\alpha}$$

($\omega_0^2>0$ ponieważ $0<\alpha<1$), a współczynnik tłumienia

$$2k=\frac{1-\alpha-b\alpha+b\tau\alpha}{\tau\alpha}$$

i tak otrzymaliśmy równanie oscylatora harmonicznego z tłumieniem

$$\ddot{Y}+2k\dot{Y}+\omega_0^2 Y=0$$

Dla $k = 0$ punkt $(0; 0)$ jest środkiem, wtedy gospodarka oscyluje wokół tego położenia ze stałą amplitudą. Dla $k > 0$ punkt $(0; 0)$ jest stabilnym ogniskiem, jeśli tylko $k < \omega_0$, amplituda jest malejąca. Dla $k < 0$ rozważany punkt jest niestabilnym punktem równowagi.

Dziękuję serdecznie za uwagę!