# Procesy z Opóźnieniem

Jan Olek

Uniwersytet Stefana Kardynała Wyszyńskiego

2013

# Wzór równania logistycznego:

- $\dot{\mathrm{N}}(\mathrm{t})=\mathrm{rN}(\mathrm{t})(1-\frac{N}{K})$, gdzie

  $\dot{N}(t)$ - przyrost populacji w czasie t
  $r$ - rozrodczość netto, $(r > 0)$
  $N$ - liczebność populacji
  $K$ - pojemność środowiska
  $N(t)$ - zagęszczenie populacji w chwili t
  $N(t-\tau)$ - liczba osobników, które w chwili t są w wieku $\tau$
  $\frac{\dot{N}}{N}$- per capita, względy przyrost liczebności populacji

  Sposobem wprowadzenia struktury wieku jest rozpatrywanie równań różniczkowych z opóźnieniem.

# Założenia:

- per capita jest funkcją liniową wielkości populacji $N(t)$ w danej chwili $t$
- rozmnażają się tylko te osobniki, które są w ustalonym w wieku $\tau$
- szybkość zmian per capita zależy od liczebności osobników w wieku $\tau$ w chwili $t$, a zatem od $N(t-\tau)$
- funkcja liniowa jest funkcją malejąca

# Równanie logistyczne z opóźnieniem

Przy takich założeniach równanie na przyrost *per capita* przyjmuje postać:

$$\frac{1}{N(t)}\dot{\mathrm{N}}(\mathrm{t})=\mathrm{r}(1-\frac{N(t-\tau)}{K}),$$

W szczególności *równanie logistyczne z opóźnieniem* zaproponowane przez *G. E. Hutchinsona* w 1948 r. zapiszemy jako

$$\dot{\mathrm{N}}(\mathrm{t})=\mathrm{rN}(\mathrm{t})(1-\frac{N(t-\tau)}{K})$$

# Badanie zależności rozwiązań równania $\frac{1}{N(t)}\dot{N}(t)=r(1-\frac{N(t-\tau)}{K})$ od wielkości opóźnienia $\tau > 0$

Zajmiemy się najpierw omówieniem podstawowych własności, takich jak istnienie, jednoznaczność, nieujemność rozwiązań dla nieujemnego warunku początkowego.
Niech:

- Równanie będzie autonomiczne
- $N(0) = N_0$ - początkowa liczebność populacji
- $N_0 : [-\tau, 0] \to \Re^+$ - funkcja początkowa określona na przedziale $[-\tau, 0]$
- funkcja jest ciągła, $t \in [0, \tau]$

# Dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania

Niech,

$\frac{1}{N(t)}\dot{N}(t)=r(1-\frac{N_0(t-\tau)}{K})$

$\ln\frac{N(t)}{N_0(0)}=rt-\frac{r}{K}\int\limits_{-\tau}^{t-\tau} N_0(s)ds$

$$N(t) = N_0(0)exp[(rt - \frac{r}{K})\int\limits_{-\tau}^{t-\tau} N_0(s)ds] \text{ dla } t \in [0, \tau]$$

Oznaczmy otrzymane rozwiązanie przez

$$N_1(t) = N_0(0)\exp\left(rt - \frac{r}{K}\int\limits_{-\tau}^{t-\tau} N_0(s)ds\right) \text{ dla } t \in [0, \tau]$$

Teraz zastosujemy metodę indukcji matematycznej. Załóżmy, że znamy rozwiązanie $N_k(t)$ na przedziale $[(k-1)\tau, k\tau]$ i znajdźmy rozwiązanie na kolejnym przedziale

$$N_{k+1}(t) = N_k(k\tau)\exp\left(r(t-k\tau) - \frac{r}{K}\int\limits_{(k-1)\tau}^{t-\tau} N_k(s)ds\right)$$

dla $\quad t \in [k\tau, (k+1)\tau]$.

## Lemat 1

Rozwiązania równania $\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$ są nieujemne dla dowolnej ciągłej nieujemnej funkcji początkowej $\phi$: $[-\tau,0] \in \Re^+$

**Dowód**:

Dla odcinka $[0,\tau]$ mamy rozwiązanie postaci

$$N(t) = \phi(0)\exp\left(rt - \frac{r}{K}\int_{-\tau}^{t-\tau}\phi(s)ds\right) \quad \text{dla} \quad t \in [0,\tau],$$

które jest oczywiście nieujemne dla $\phi(0) \geqslant 0$.
Stąd $N(\tau) \geqslant 0$, gdyż stanowi ona wartość początkową dla następnego kroku metody kroków.

Załóżmy, że mamy nieujemne rozwiązanie $N(t)$ określone na odcinku $[n\tau, (n+1)\tau]$
Wtedy na odcinku $[(n+1)\tau, (n+2)\tau]$ rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$N(t) = N((n+1)\tau)\exp\left(r(t-(n+1)\tau) - \frac{r}{K}\int_{n\tau}^{t-\tau} N(s)ds\right)$$

czyli jest nieujemne.

Zatem na mocy indukcji matematycznej pokazaliśmy, że rozwiązanie równania są nieujemne dla wszystkich $t \geqslant 0$, o ile funkcja początkowa jest nieujemna.

$\square$

# Badanie asymptotycznej stabilności rozwiązań stacjonarnych

Rozwiązania stacjonarne dla równania z opóźnieniem są takie same jak w przypadku równania bez opóźnienia, gdyż są to rozwiązania postaci $N(t)=const$, zatem nie zależą od czasu, czyli także od opóźnienia.

*Metoda linearyzacji* polega na dokonaniu zamiany zmiennych w taki sposób, aby badane rozwiązanie stacjonarne stało się rozwiązaniem zerowym, wyróżnieniu w prawej stronie równania części liniowej, sprawdzeniu własności
części nieliniowej i zbadaniu wartości własnych równania zlinearyzowanego.

# Badanie rozwiązań stacjonarnych równania logistycznego

Niech $\bar{N}$ będzie rozwiązaniem stacjonarnym.
Stąd: $0 = r\bar{N}(1 - \frac{\bar{N}}{K})$, czyli

$$\bar{N} = 0 \text{ albo } \bar{N} = K.$$

Wprowadzamy nową zmienną $x(t)$, która oznacza odchylenie od stanu stacjonarnego, $N(t) = \bar{N} + x(t)$, przy czym zakładamy, że $|x(t)| < \varepsilon$ i pomijamy wyrazy rzędu $\varepsilon^2$. Stąd:

$$\dot{x}(t) = r(\bar{N} + x(t))\left(1 - \frac{\bar{N} + x(t-\tau)}{K}\right)$$

# Linearyzacja dla stanu stacjonarnego $\bar{N} = 0$

$\dot{x}(t) = r(\bar{N} + x(t))\left(1 - \frac{\bar{N}+x(t-\tau)}{K}\right)$
dla $\bar{N} = 0$. Otrzymujemy:
$\dot{x}(t) = rx(t)(1 - \frac{x(t-\tau)}{K})$
$\dot{x}(t) = rx(t) - \frac{rx(t)x(t-\tau)}{K}$.
Zatem równanie po linearyzacji ma postać:

$$\dot{x} = rx(t)$$

Część nieliniowa dla tego równania jest równa:

$$f_0 = -\frac{rx(t)x(t-\tau)}{K}$$

Część liniowa tj.

$$\dot{x}(t) = rx(t),$$

ma jedną wartość własną $r = 0$, ale z założenia $r > 0$

Część nieliniowa tj.

$$f_0 = (x(t), x(t-\tau)) = \frac{-r}{K} x(t) x(t-\tau)$$

Sprawdźmy założenia twierdzenia o linearyzacji.
$f_0(0,0) = 0$; $\frac{\partial f_0}{\partial x(t)} = \frac{-r}{K} x(t-\tau)$; $\frac{\partial f_0}{\partial x(t-\tau)} = \frac{-r}{K} x(t)$; czyli obie funkcje zerują się w punkcje $(0,0)$

Zatem równanie stacjonarne $\bar{N} = 0$ jest *niestabilne i nie zależy od opóźnienia.*

# Linearyzacja dla stanu stacjonarnego $\bar{N} = K$

$\dot{x}(t) = r(\bar{N} + x(t))\left(1 - \frac{\bar{N}+x(t-\tau)}{K}\right)$
dla $\bar{N} = K$ Otrzymujemy:
$\dot{x}(t) = r(K + x(t)(1 - \frac{K+x(t-\tau)}{K})$
$\dot{x}(t) = (rK + rx(t))(\frac{-x(t-\tau)}{K})$
$\dot{x}(t) = -rx(t-\tau) - \frac{r}{K}x(t)x(t-\tau)$
Zatem równanie po linearyzacji ma postać:

$$\dot{x}(t) = -rx(t-\tau)$$

Część nieliniowa dla tego równania jest równa:

$$f_k = -\frac{rx(t)x(t-\tau)}{K} = f_0,$$

spełnia założenia o linearyzacji.

# Równanie charakterystyczne

Dla równania:

$$\dot{x}(t) = -rx(t-\tau)$$

wyznaczę równanie charakterystyczne.
Szukam rozwiązań postaci wykładniczej tj.

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$
$$\dot{x}(t) = \lambda x_0 e^{\lambda t}$$
$$x(t-\tau) = x_0 e^{\lambda(t-\tau)}$$

Zatem równanie charakterystyczne przyjmuje postać:

$$\lambda x_0 e^{\lambda t} = -r x_0 e^{\lambda(t-\tau)}$$
$$\lambda = -re^{-\lambda\tau}$$

# Kryterium Michajłowa

pozwala stwierdzić, że jeśli pseudowielomian charakterystyczny $W(\lambda)$ nie ma zer na osi urojonej to odpowiadające mu rozwiązanie stacjonarne jest asymptotycznie stabilne, czyli wszystkie wartości własne mają ujemne części rzeczywiste, jeśli argument wektora $W(i\omega)$ wzrasta o $\frac{\pi}{2}$ przy zmianie $\omega$ od 0 do $\infty$.

Krzywą, którą zakreśla w przestrzeni zespolonej wektor $W(i\omega)$ nazywamy *hodografem Michajłowa*

Pseudowielomian charakterystyczny jest postaci:

$$W(\lambda) = \lambda + re^{-\lambda\tau}$$

# Badanie psudowielomianu charakterystycznego $W(\lambda) = \lambda + re^{-\lambda\tau}$

Pokażemy, że $\bar{N} = K$ jest stabilne gdy $r\tau < \frac{\pi}{2}$ i niestabilne w pozostałych przypadkach.
Zauważmy, że dla $\tau = 0$ mamy $\lambda = -r < 0$.
Stąd dla małych opóźnień stan $\bar{N} = K$ pozostaje stabilny.
Rozważmy:

$$W(\omega i) = \Re W(\omega i) + \Im W(\omega i) \text{ dla } \tau > 0$$

$$\Re W(\omega i) = r\cos(\omega\tau)$$
$$\Im W(\omega i) = \omega - r\sin(\omega\tau)$$

Ponieważ $W(0) = \Re W(0) = r$,
więc argument początkowy jest równy 0

Rozważmy dwa przypadki:

1. $\tau < \frac{1}{r}$
2. $\tau > \frac{1}{r}$

1. Jeśli $\tau < \frac{1}{r}$ to $\Im W(\omega i)$ rośnie gdy $\omega$ zmienia się od 0 do $\infty$,bo

$$\lim_{\omega \to 0} \Im W(\omega i) = \lim_{\omega \to 0} \omega - r \sin(\omega \tau) = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \Im W(\omega i) = \lim_{\omega \to \infty} \omega - r \sin(\omega \tau) = \infty$$

Natomiast $\Re W(\omega i) = rcos(\omega \tau) \in [-r, r]$, gdyż $\cos(\omega \tau) \in [-1, 1]$.
Wobec tego $argW(\omega i)$ także oscyluje, przy czym jego wartości są coraz bliższe $\frac{\pi}{2}$.
Zatem przyrost $\Delta argW(\omega i) = \frac{\pi}{2}$ co dowodzi asymptotycznej stabilności.

2. Jeśli $\tau > \frac{1}{r}$

$\Im W(\omega i)$ również zaczyna oscylować i hodograf może przeciąć oś rzeczywistą.

Niech punktem przecięcia będzie takie $\bar{\omega}$,że

$$\Re W(\bar{\omega} i) = 0$$
$$rcos(\bar{\omega}\tau) = 0$$
$$\bar{\omega}\tau = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in N$$
$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{k\pi}{\tau}$$

$$\Im W(\bar{\omega} i) = \bar{\omega} - rsin(\bar{\omega}\tau),$$

$$\sin(\bar{\omega}\tau) = 1 \text{ dla } k = 2n + 1, n \in N$$
$$\sin(\bar{\omega}\tau) = -1 \text{ dla } k = 2n, n \in N$$

Stąd:

$$\Im W(\bar{\omega} i) = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2k\pi}{\tau} - r$$
$$\Im W(\bar{\omega} i) = \frac{3\pi}{2\tau} + \frac{2k\pi}{\tau} + r$$

Widzimy, że $\Im(\omega i) > 0$ dla wszystkich $k$, jeśli jest dodatnie dla $k = 0$, co prowadzi do nierówności $r\tau < \frac{\pi}{2}$

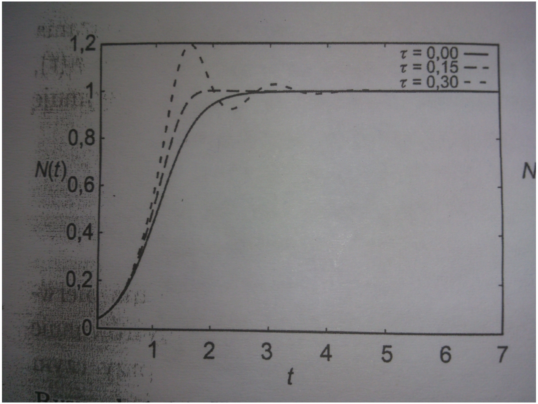
W punkcie $\tau = \frac{\pi}{2r}$ *Kryterium Michajłowa* ani tw. o *linearyzacji* nie możemy zastosować, ale można zastosować *bifrukcje Hopfa* w jej wyniku pojawiają się nietrywialne rozwiązania okresowe o okresie $\frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{r}$.

Skoro rozwiązania są okresowe to w ptk. $\tau = \frac{\pi}{2r}$ nie ma asymptotycznej stabilności.

Reasumując:

- Rozwiązanie $N = 0$ jest niestabilne
- rozwiązanie stacjonarne $N = K$ jest globalnie stabilne
- Na początku występują oscylacje gasnące
- w ptk $\tau = \frac{\pi}{2r}$ następuje destabilizacja i otrzymujemy oscylacje niegasnące
- wzrost opóźnienia powoduje wzrost amplitudy, która stabilizuje się z czasem

Wykres rozwiązań równania logistycznego z opóźnieniem dla różnych wartości opóźnienia.



# Równanie logistyczne inaczej

$\frac{N'(t)}{N(t)}$ – względny przyrost liczebności populacji

więcej osobników

$\Downarrow$

mniej pożywienia

$\Downarrow$

mniej energii

$\Downarrow$

mniej chęci do rozmnażania

$\Downarrow$

mniejszy przyrost liczebności populacji

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$