dr Jan Koroński
Politechnika Krakowska
Instytut Matematyki
dr Renata Bujakiewicz-Korońska
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Instytut Fizyki

Zastosowania matematyki w pracach naukowych Tadeusza Banachiewicza (1882–1954) (w pięćdziesięciolecie śmierci)

Po upływie połowy wieku od śmierci twórcy krakowianów Tadeusza Banachiewicza nastąpił już najwyższy czas, aby również w ramach Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Szkoleniowej Zastosowań Matematyki nie tylko przypomnieć, ale także skomentować rachunek krakowianowy w kontekście rachunku macierzowego i rolę tego rachunku w zastosowaniach matematyki. Macierze odkryli Hamilton w 1854 roku i Caley w 1853 roku. Banachiewicz rachunek krakowianowy wprowadził oficjalnie w 1922 roku, gdy posłużył się nowymi formułami podczas wykładu na transformację kosinusów kierunkowych punktu poprzez obrót prostokątnego układu współrzędnych wokół jednej z trzech osi. Jednak początki krakowianów sięgają roku 1916 — o czym pisze sam ich twórca w *Vitas in Astronomy* (wyd. A. Beer, t. I, London–New York 1955, s. 2001). Był to czas, gdy do powszechnego użytku wchodziły arytmometry, które znacząco usprawniły mechaniczną stronę obliczeń, i zmniejszało się znaczenie suwaków logarytmicznych. Astronomowie w dobie suwaków logarytmicznych do obliczeń ze względu na oczekiwaną dokładność używali różnego rodzaju tablic. Jak się wydaje, względy praktyczne najpierw zadecydowały o tym, że Banachiewicz wpadł na pomysł i zdefiniował krakowiany, a potem zdecydowały o ich ogromnej karierze w dobie, kiedy nie było jeszcze komputerów. Chociaż i w dobie komputerów krakowiany znacznie oszczędzają czas obliczeń, który niejednokrotnie jest bardzo drogi, i niejednokrotnie upraszczają programy komputerowe.

Przed laty, za życia Tadeusza Banachiewicza w środowisku naukowym krakowskim żywo dyskutowano wzajemne relacje między macierzami i krakowianami. Dyskusja ta odbywała się na posiedzeniach Polskiego Towarzystwa Matematycznego i posiedzeniach PAU oraz na seminariach Instytutu Matematycznego PAN i w innych miejscach. Niekonwencjonalna czasem forma dyskusji i żywiołowość dyskutantów ściągały szerokie rzesze słuchaczy niekoniecznie zainteresowanych matematyką. Niektórzy wspomniane dyskusje traktowali jak darmowy program kabaretowy. Z jednej strony przeciwnicy krakowianów na czele z Tadeuszem Ważewskim atakowali sensowność krakowianów, a z drugiej strony zwolennicy krakowianów pod przewodnictwem ich twórcy wykazywali zalety krakowianów w porównaniu do macierzy. Matematycy forsowali pogląd, że teoretycznie krakowiany nie wnoszą nic nowego, gdyż wszystko, co uzyskuje się krakowianowo, można uzyskać poprzez macierze. Z kolei zwolennicy krakowianów uważali je za lepsze narzędzie od macierzy. Wydaje się, że doszło do sytuacji braku porozumienia, gdyż niedostatecznie ściśle doprecyzowano pojęcie macierzy z jednej strony i pojęcie krakowianu z drugiej strony. Było to przyczyną licznych nieporozumień. Zresztą definiowanie macierzy we współczesnych podręcznikach nadal pozostawia wiele do życzenia. Otóż do tej pory w prawie wszystkich podręcznikach akademickich definiuje się macierze liczbowe rzeczywiste jako odwzorowanie przyporządkowujące parom liczb naturalnych liczby rzeczywiste, czyli macierze traktowane są w definicji jako tabliczki liczb. Następnie osobno wprowadza się definicje działań na macierzach (tak samo traktowano krakowiany — jako tabliczki liczb). Jest to ewidentny błąd dydaktyczny o głębokich konsekwencjach merytorycznych, gdyż zbiór samych prostokątnych tabliczek liczb nie stanowi macierzy (ani nie stanowi krakowianu). Zbiór macierzy posiada określoną strukturę działań (również określoną strukturę działań posiada zbiór krakowianów). Dlatego w definicji macierzy należy zawrzeć definicje (aksjomaty) działań na macierzach, czyli należy podać definicję aksjomatyczną macierzy, z której wynikną wszystkie podstawowe własności macierzy.

Postaramy się uzasadnić tezę, że macierze i krakowiany wprawdzie częściowo zazębiają się, jednak ani jedne, ani drugie nie są lepsze i nie obejmują się wzajemnie jako teoria o określonej strukturze, w tym sensie, że jedne są ogólniejsze od drugich (jak to niektórzy uważali w przeszłości). Aby osiągnąć zamierzony cel, sformułujemy aksjomatyczną definicję macierzy i aksjomatyczną definicję krakowianu i porównując te definicje wyciągniemy stosowne wnioski.

Aksjomatyczna definicja macierzy

Niech $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Każde odwzorowanie $\boldsymbol{A} : N_m \times N_n \to R$ nazywamy macierzą prostokątną o wymiarach $m \times n$, jeżeli zachodzą następujące aksjomaty określające działania na macierzach:

1) równość macierzy

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$$

2) dodawanie macierzy

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

3) mnożenie macierzy przez liczbę

$$\lambda \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

4) mnożenie macierzy przez macierz

$$[a_{ij}]_{m\times n} \cdot [b_{jk}]_{n\times p} = [c_{ik}]_{m\times p} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, p\}\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Aksjomatyczna definicja krakowianu

Niech $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Każde odwzorowanie $\boldsymbol{a} : N_m \times N_n \to R$ nazywamy krakowianem prostokątnym o wymiarach $m \times n$, jeżeli zachodzą następujące aksjomaty określające działania na krakowianach:

1) równość krakowianów

$$\{a_{ij}\}_{m\times n} = \{b_{ij}\}_{m\times n} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$$

2) dodawanie krakowianów

$$\{a_{ij}\}_{m\times n} + \{b_{ij}\}_{m\times n} = \{c_{ij}\}_{m\times n} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

3) mnożenie krakowianu przez liczbę

$$\lambda \cdot \{a_{ij}\}_{m\times n} = \{c_{ij}\}_{m\times n} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

4) mnożenie krakowianu przez krakowian

$$\{a_{ij}\}_{m\times n} \cdot \{b_{kj}\}_{p\times n} = \{c_{ik}\}_{m\times p} \underset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, p\}\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{kj}.$$

Porównując podstawowe własności działań na macierzach i krakowianach zauważmy, że mnożenie macierzy jest łączne, a mnożenie krakowianów nie jest łączne. Powoduje to, że krakowiany z działaniem mnożenia nie stanowią tzw. grupy algebraicznej, natomiast macierze z mnożeniem macierzy stanowią grupę. Widać więc, że krakowiany mają inną strukturę algebraiczną niż macierze. Z podstaw algebry wiadomo, że macierze są izomorficzne z odwzorowaniami liniowymi, czyli macierze algebraicznie są nierozróżnialne od odwzorowań liniowych, a izomorfizm przenosi strukturę. Można by oczywiście szukać izomorficznych odpowiedników krakowianów, które na pewno nie mogą być tożsame z odwzorowaniami liniowymi ze względu na inną strukturę krakowianów, którą dla ustalenia uwagi można by nazwać strukturą krakowianową. Wynika z powyższego, że istotna różnica między macierzami a krakowianami tkwi w innej strukturze obu pojęć, a nie, jak niektórzy sądzą, w innej kolejności numeracji wskaźników elementów macierzy (wiersz – kolumna) czy krakowianu (kolumna – wiersz). Macierze i krakowiany są dwoma autonomicznymi rachunkami. I nie jest tak, jak niektórzy sądzili, że krakowiany są szczególnym przypadkiem macierzy, ani nie jest na odwrót, gdyż gdyby tak było, to wówczas krakowiany musiałyby być izomorficzne z podzbiorem odwzorowań liniowych, co ze względu na wcześniej wykazaną różnicę struktury macierzy i krakowianów nie jest możliwe, i na odwrót, macierze musiałyby być izomorficzne z izomorficznymi odpowiednikami krakowianów, co również nie jest możliwe z tych samych powodów co poprzednio. Nieco uboższa struktura algebraiczna krakowianów i inna definicja mnożenia krakowianów daje możliwość definiowania pewnych obiektów nie definiowanych dla macierzy, jak np. pierwiastek krakowianu i poprzez to możliwe staje się uzyskiwanie pewnych wyników, których nie da się uzyskać macierzowo.

Iloraz krakowianów, odwrotność i pierwiastek krakowianu

Ilorazem krakowianów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nazywa się krakowian $\boldsymbol{x}$, jeżeli spełniona jest równość $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, gdzie krakowian jednostkowy $\boldsymbol{\tau}$ ma elementy określone następująco: $\tau_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz $\tau_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Oczywiście nie zawsze istnieje iloraz krakowianów.

Operacje dzielenia i rozkładu krakowianów kwadratowych na krakowiany trójkątne umożliwiły Banachiewiczowi opracowanie nowej metody rozwiązywania układów równań liniowych kramerowskich bez potrzeby stosowania wzorów Cramera.

Odwrotnością krakowianu $\boldsymbol{a}$ nazywa się krakowian $\boldsymbol{b}$, gdy zachodzi warunek $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau}$. Zatem $\boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{b}$, gdzie symbolem $\boldsymbol{a}^{-1}$ oznacza się odwrotność krakowianu $\boldsymbol{a}$.

Pierwiastkiem kwadratowym symetrycznego krakowianu $\boldsymbol{a}$ nazywa się trójkątny krakowian $\boldsymbol{r}$, gdy zachodzi równość $\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{a}$, gdzie $\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}$.

Wprowadzone przez Banachiewicza operacje odwrotności i pierwiastka krakowianu miały na celu ich zastosowanie do modyfikacji metody Gaussa najmniejszych kwadratów. Algorytm Banachiewicza metody najmniejszych kwadratów pozwala na szybsze i bardziej przejrzyste wyznaczenie niewiadomych niż klasyczna metoda.

Należy tu dodać, że rachunek krakowianowy Banachiewicza oprócz zastosowań do zamiany współrzędnych, rozwiązywania równań liniowych, metody najmniejszych kwadratów, okazał się także użyteczny w wielu innych, czasem bardzo skomplikowanych zagadnieniach. W szczególności rachunek krakowianowy został z powodzeniem zastosowany do rozwiązania problemu dowolnej liczby obrotów ciała sztywnego dookoła różnych osi, eleganckiego i bezpośredniego rozwiązywania wielokątów sferycznych (przed metodą Banachiewicza wielokąty sferyczne rozwiązywano w bardzo skomplikowany sposób rozkładając je na trójkąty sferyczne). Rachunek krakowianowy znalazł także liczne zastosowania w zagadnieniach geodezyjnych (w poligonometrii) oraz w innych dziedzinach nauki, jak np. w astronomii teoretycznej (wyznaczanie orbit planet — metoda Banachiewicza-Olbersa) i w geofizyce.

Banachiewicz od roku 1923 opublikował ponad 50 prac dotyczących krakowianów i ich zastosowań. W roku 1952 został wydany jego skrypt pt. *Metody rachunków astronomicznych*, w przeważającej części poświęcony krakowianom i ich zastosowaniom w astronomii. Natomiast w roku 1959 staraniem Komitetu Astronomii i Komitetu Geodezji Polska Akademia Nauk doprowadziła do pośmiertnego wydania obszernej monografii Tadeusza Banachiewicza pt. *Rachunek krakowianowy*, gdzie na ponad 400 stronach zawarto owoc przeszło dwudziestoletniej pracy samego twórcy krakowianów, który zmarł 17 listopada 1954 roku i od 1955 roku spoczywa w krypcie wybitnych Polaków w Bazylice Ojców Paulinów „Na Skałce” w Krakowie. (Fundatorem klasztoru Paulinów „Na Skałce” był Jan Długosz (1415–1480)).

Więcej informacji na temat Tadeusza Banachiewicza i jego idei naukowych można znaleźć między innymi w następujących pozycjach literaturowych i źródłach archiwalnych:

Literatura

[1] T. Banachiewicz, *Rachunek krakowianowy.* PWN, Warszawa 1959.

[2] T. Banachiewicz, *Obserwatorium krakowskie w latach 1919–1927.* Kraków 1928.

[3] T. Banachiewicz, *Maszyny do rachowania.* Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego na rok 1923. Kraków 1923.

[4] W. Baran, *Zastosowanie metod krakowianowych do wyrównywania dużych sieci geodezyjnych.* Zeszyty Naukowe AGH Nr 999, Seria Geodezja z. 86, Kraków 1986, str. 41–50.

[5] R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, *Krakowiany i inne idee matematyczne Tadeusza Banachiewicza.* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka z. 76, 1996, str. 23–46.

[6] R. Bujakiewicz, *Idee naukowe i organizacyjne Tadeusza Banachiewicza.* Praca magisterska napisana pod kierunkiem Prof. Dr. hab. K. Rudnickiego w Zakładzie Astronomii Obserwacyjnej i Pozagalaktycznej Obserwatorium Astronomicznego UJ, Kraków, 1985.

[7] T. Z. Dworak, J. M. Kreiner: *Tadeusz Banachiewicz — twórca krakowianów.* Wydawnictwo Ossolineum PAN, Seria „Nauka dla wszystkich” Nr 387, Kraków 1985.

[8] T. Z. Dworak, J. M. Kreiner, J. Mietelski, *Tadeusz Banachiewicz* (1882–1954). Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki UJ (pod redakcją Bolesława Szafirskiego), Kraków 2000, str. 161–179.

[9] J. Gaździcki, *Krakowiany w obliczeniach geodezyjnych.* Zeszyty Naukowe AGH Nr 999, Seria Geodezja z. 86, Kraków 1986, str. 13–16.

[10] S. Gołąb, *Studia z dziejów Katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego.* Wydanie Jubileuszowe UJ, Kraków 1964.

[11] J. Koroński, R. Bujakiewicz-Korońska, *Idee matematyczne Tadeusza Banachiewicza.* W druku w serii *W Służbie Nauki*, Wydawnictwo PAU w Krakowie.

[12] J. Koroński, R. Bujakiewicz-Korońska, *Matematyczny dorobek naukowy Tadeusza Banachiewicza.* W druku w Materiałach Konferencyjnych XIX Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Zamość, 06–10.06.2005).

[13] F. Kucharzewski, *O astronomii w Polsce.* Paryż 1872.

[14] S. Łoza, *Czy wiesz kto to jest?* Warszawa 1938.

[15] S. Milbert, *Wkład profesora Tadeusza Banachiewicza w rozwój krakowskiego ośrodka geodezyjnego.* Zeszyty Naukowe AGH Nr 999, Seria Geodezja z. 86, Kraków 1986, str. 17–19.

[16] A. Peretiatkowicz, M. Sobieski, *Współczesna kultura polska.* Poznań 1932.

[17] E. Rybka, *Astronomia ogólna.* PWN, Warszawa 1983.

[18] R. Szafraniec, *Prof. T. Banachiewicz na tle „Notat codziennych”.* Informacja prywatna, Kraków 1985.

[19] J. Witkowski, *Tadeusz Banachiewicz — uczony, nauczyciel, autor, wydawca, człowiek.* Warszawa 1969.

[20] J. Witkowski, K. Kordylewski, *Pokłosie 50-letniej działalności naukowej Tadeusza Banachiewicza.* Kraków 1953.

[21] J. Witkowski, *The life and work of Prof. Dr Tadeusz Banachiewicz.* Acta Astr. Ser. C, vol. 5, 1955, pp. 85–94.

[22] Zbiór protokołów z zebrań naukowych Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego z lat 1938–1959. Archiwum Instytutu Astronomii UJ.