

Przemysław Kiciak
 Uniwersytet Warszawski
 Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Numeryczna minimalizacja całkowej krzywizny Mengerera dla krzywych zamkniętych

Całkowa krzywizna Mengerera z wykładnikiem p jest to funkcjonal określony wzorem

$$K_p(\mathcal{C}) = \int \int \int K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)^p d\mathcal{C} d\mathcal{C} d\mathcal{C}.$$

Jego argumentem jest krzywa $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$; całkowanie przebiega po wszystkich trójkach punktów $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathcal{C}$, względem długości łuku krzywej \mathcal{C} . Funkcja $K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, zwana krzywizną Mengerera, jest odwrotnością promienia okręgu przechodzącego przez punkty $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$.

Dla $p > 3$ całkowa krzywizna Mengerera jest nieskończona, jeśli krzywa ma samoprzecięcia lub nieciągły kierunek stycznej. W zbiorze krzywych zamkniętych o ustalonej długości całkowa krzywizna Mengerera jest pewną miarą „powyginania” krzywej i przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli krzywa jest okręgiem. Oprócz tego całkowa krzywizna Mengerera ma nieskończenie wiele lokalnych minimów, które są różnymi węzłami. Przedstawiana praca ma na celu numeryczne znajdowanie takich krzywych minimalnych.

Postawione tu zadanie optymalizacji jest trudne. Po pierwsze, całkowa krzywizna Mengerera jest niezmiennikiem izometrii, przez co poszukiwane minima nie są jednoznacznie określone. Po drugie, użycie parametryzacji do reprezentowania krzywej wprowadza kolejny powód niejednoznaczności rozwiązania. Po trzecie, obliczenie całkowej krzywizny Mengerera i jej pochodnych ze względu na współczynniki reprezentacji krzywej jest dość kosztowne.

Kluczem do rozwiązania przedstawionych wyżej problemów jest dyskretyzacja przez użycie B-sklejanej reprezentacji krzywych, co umożliwia obliczanie wartości funkcjonału i jego pochodnych stosunkowo małym kosztem, oraz regularyzacja zadania przez wprowadzenie odpowiednich funkcji kary. W ten sposób powstaje zadanie minimalizacji funkcji wielu (w praktyce kilkudziesięciu do kilkuset) zmiennych, przy czym minima tej funkcji są punktami izolowanymi. Użyta numeryczna metoda minimalizacji jest algorytmem hybrydowym; jedna iteracja w początkowej fazie obliczeń dokonuje minimalizacji wzdłuż trajektorii Levenberga–Marquardta, a w końcowej fazie jest krokiem metody Newtona. Szybka zbieżność tej metody, mimo konieczności obliczania hesjanu minimalizowanej funkcji, przekłada się na stosunkowo krótki czas obliczeń. Jednym z elementów algorytmu jest przeciwdziałanie „zjawisku tunelowemu”, które może prowadzić do „rozplatania” się węzła. Algorytm zapewnia, że znaleziona krzywa jest topologicznie tym samym węzłem, co krzywa będąca punktem startowym.