1. Znaleźć bazy Jordana i macierze Jordana endomorfizmów $\mathbb{R}^2$, których macierze w bazie kanonicznej mają postać:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. Znaleźć bazy Jordana i macierze Jordana endomorfizmów $\mathbb{R}^3$, których macierze w bazie kanonicznej mają postać:

(a) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

3. Udowodnić twierdzenie Cayley-Hamiltona: niech p będzie wielomianem charakterystycznym macierzy kwadratowej A. Wtedy $p(A) = 0$.

4. Wykazać, że macierze kwadratowe $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ są podobne (istnieje macierz $P \in GL_n(\mathbb{C})$ taka, że $B = P^{-1}AP$) wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają ten sam rozkład Jordana.

5. Pokazać, że jeżeli λ jest wartością własną macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, to λ^k jest wartością własną macierzy A^k, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

6. Niech J będzie klatką Jordana wymiaru k dla wartości własnej λ. Pokazać, że wielomianem minimalnym macierzy J jest $(t-\lambda)^k$.

7. Wykazać, że macierze podobne mają takie sme wielmoany minimalne.

8. Pokazać, że jeżeli $A = B \oplus C$, gdzie $A \in M_{n\times n}(K)$, $B \in M_{l\times l}(K)$, $C \in M_{(n-l)\times(n-l)}(K)$ są macierzami kwadratowymi, to wielmianem minimalnym macierzy A jest najmniejsza wspólna wielokrotność wielomianów minimalnych macierzy B i C.

9. Znaleźć wielomiany minimalne macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Wykazać, że A jest diagonizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wielomian minimalny ma jedynie pierwiastki jednokrotne.

11. Opisać wszystkie możliwe formy macierzy Jordana dla macierzy A, której wielomian charakterystyczny jest postaci $(t-2)^2(t-3)^3$.

12. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ spełnia równanie $A^k = I$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy A jest diagonizowalna.

13. Niech macierz A spełnia równanie $A^2 = A$. Wykazać, że A jest diagonizowalna do macierzy D posiadającej na przekątnej jedynki oraz zera.

14. Wykazać, że jeżeli pewna potęga macierzy $A \in GL_n(\mathbb{C})$ jest diagonizowalna, to macierz A również jest diagonizowalna.