1. Wprowadźmy następującą relację równoważności: dwa endomorfizmy $f : U \longrightarrow U$ oraz $f' : U' \longrightarrow U'$ są równoważne, jeżeli istnieją izomorfizmy $g, h : U \longrightarrow U'$ takie, że $f' \circ g = h \circ f$. Niech $\dim U < \infty$ oraz $\dim U' < \infty$. Wykazać, że f i f' są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim U = \dim U'$ oraz $\mathrm{rk} f = \mathrm{rk} f'$.

2. Macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie kanonicznej jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Niech $f = g + h$ będzie rozkładem Jordana odwzorowania f. Znaleźć takie wielomiany $P, Q \in \mathbb{R}[t]$, że $g = P(f), h = Q(f)$.

3. Wyprowadzić ogólny wzór na ciąg rekurencyjny zadany wzorem $a_0 = 0, a_1 = 2$, oraz $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}, n \geqslant 2$.

4. Korzystając z postaci Jordana macierzy, rozwiązać równanie

$$X^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Korzystając z postaci Jordana macierzy, obliczyć

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{80}.$$