1. Niech $X = \mathbb{R}_n[t]$ będzie przestrzenią wielmianów stopnia co najwyżej n. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny i wartości własne endomorfizmu

$$d : X \ni w \longrightarrow w' \in X,$$

gdzie w' jest pochodną wielomianu w.

2. Wykazać następujące związki między wielomianami charakterystycznymi:
   (a) $(-t)^m W_{AB}(t) = (-t)^n W_{BA}(t)$, gdzie $A \in M_{n\times m}(K)$ oraz $B \in M_{m\times n}(K)$,
   (b) $W_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{\det A}(-t)^n W_A\left(\frac{1}{t}\right)$, gdzie $A \in GL_n(K)$,
   (c) $W_M(t) = W_{A+B}(t)W_{A-B}(t)$, gdzie $A, B \in M_{n\times n}(K)$, oraz

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

3. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będącego:
   (a) symetrią względem płaszczyzny $x = -z$,
   (b) rzutowaniem na płaszczyznę $y = -z$,
   (c) symetrią względem prostej $x = y = -2z$,
   (d) obrotem przestrzeni o kąt $\pi/4$ względem osi OY.

4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$:

$$F(x, y, z) = (x - y + 2z, x - z, x + y + 2z).$$

Wyznaczyć macierz oraz bazę Jordana, gdy
   (a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
   (b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

5. Znaleźć bazy Jordana i macierze Jordana, które w bazach kanonicznych mają postać
   (a) $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Obliczyć:
   (a) $(1 + i\sqrt{3})^{2013}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{2013}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{2013}$

7. Wykazać, że jeżeli macierz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ spełnia równanie $X^2 = \lambda \mathrm{Id}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$, to jest postaci
$$\begin{bmatrix} p & y \\ z & q \end{bmatrix}$$
gdzie p i q są wzajemnie przeciwnymi pierwiastkami stopnia drugiego z $\lambda - yz$, lub $X = r\mathrm{Id}$, gdzie r jest pierwiatkiem druggiego stopnia z λ.

8. Rozwiązać analogiczne zad. jak poprzednie w przypadku, gdy $\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. Każdą przestrzeń wektorową zespoloną można traktować jako przestrzeń rzeczywistą, zawężając mnożenie przez skalar do skalarów rzeczywistych. Wykazać, że jeżeli X jest zespoloną przestrznią wektorową oraz $e_1, \ldots, e_n$ tworzą bazę nad $\mathbb{C}$, to wektory $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ tworzą bazę przestrzeni X nad $\mathbb{R}$.

10. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Niech $U^{\mathbb{C}}$ będzie kompleksyfikacją U. Wykazać, $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_k \in U$ jest bazą U wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1, \ldots u_r, w_1 + iv_1, \ldots, w_k + iv_k, w_1 - iv_1, \ldots, w_k - iv_k$ jest bazą $U^{\mathbb{C}}$.

11. Niech $f : U \longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym pomiędzy rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi oraz niech $f^{\mathbb{C}} : U^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$ będzie jego kompleksyfikacją. Wykazać, że:
    (a) $f^{\mathbb{C}}$ jest jedynym odwzorowaniem liniowym, którego zawężeniem do U jest f,
    (b) $f^{\mathbb{C}}(\overline{p}) = \overline{f^{\mathbb{C}}(p)}$.

12. Niech $X^{\mathbb{C}}$ będzie kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni wektorowej X, oraz niech
$$\overline{A} = \{\overline{v}|\ v \in A\} \quad \text{gdzie } A \subset X^{\mathbb{C}}.$$
Wykazać, że:
    (a) jeżeli wektory $v_1, \ldots v_l \in X^{\mathbb{C}}$ są liniowo niezależne, to wektory $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_l}$ również są liniowo niezależne (nad $\mathbb{C}$),
    (b) Jeżeli U jest podprzestrznią zespoloną $X^{\mathbb{C}}$, to $\overline{U}$ jest również jej podprzestrzenią, oraz gdy $\dim U < \infty$, to $\dim \overline{U} = \dim U$.

13. Niech $f : U \longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem pomiędzy zespolonymi przestrzeniami wektorowymi. Niech $u_1, \ldots, u_p$ oraz $v_1, \ldots v_r$ będą bazami odpowiednio U i V. Wykazać, że f jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\mathbb{R}$-liniowe oraz w bazach $u_1, \ldots, u_p, iu_1, \ldots, iu_p$, $v_1, \ldots v_r, iv_1, \ldots iv_r$ ma macierz
$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix},$$
gdzie $A, B \in M_{q\times p}(\mathbb{R})$.

14. Niech f będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni zespolonej, a $f^{\mathbb{R}}$ będzie tym samym odwzorowaniem traktowanym jako endomorfizm przestrzeni rzeczywistej. Wykazać że
$$W_{f^{\mathbb{R}}}(t) = W_f(t)\overline{W_f}(t),$$
gdzie $\overline{W_f}$ powstaje przez zastąpienie każdego współczynnika wielomianu W_f jego sprzężeniem. Zauważyć ponadto, że
$$\det f^{\mathbb{R}} = |\det f|^2, \quad \mathrm{tr} f^{\mathbb{R}} = \mathfrak{R}(\mathrm{tr} f).$$