Niech będzie dana macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Policzyć A^n.

1. $W_A(t) = (t - a_1)(t - a_2)$, gdzie $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ oraz istnieją: macierz diagonalna $D \in M_2(\mathbb{C})$ oraz macierz odwracalna $P \in M_2(\mathbb{C})$ takie, że

   $$A = PDP^{-1}.$$

   Wtedy

   $$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

2. $W_A(t) = (t - q)^2$, gdzie $q \in \mathbb{R}$, oraz istnieje macierz $P \in GL_2(\mathbb{R})$ taka, że

   $$A = P \begin{bmatrix} q & 0 \\ 1 & q \end{bmatrix} P^{-1}.$$

   Wtedy

   $$A^n = PD^nP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad D = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 1 & q \end{bmatrix}.$$

   Niech

   $$J = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Zauważmy, że $D^n = (J + N)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} J^{n-m} N^m = J^n + nJ^{n-1}N$, ponieważ $JN = NJ$ oraz $N^2 = 0$. Zatem $A^n = P\left(J^n + nJ^{n-1}N\right)P^{-1}$.

Ćwiczenie. Obliczyć:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{2014}$,

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{17}$.