

Problem najmniejszych kwadratów (termin oddania: 28.01.2014)

1. Niech

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad m > n,$$

gdzie $R \in GL_n(\mathbb{R})$ jest macierzą górną trójkątną, a $O \in M_{m-n \times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą zerową. Niech $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Zauważyć, że rozwiązaniem problemu

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{R}c - y\|$$

jest $c = R^{-1}y_1$.

2. Zauważyć, że rozwiązaniem problemu

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|Ac - y\|, \quad \text{gdzie } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad m > n, y \in \mathbb{R}^m$$

jest

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{R}c - Q^T y\|,$$

gdzie macierze $\tilde{R} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ oraz $Q \in O_m(\mathbb{R})$ pochodzą z rozkładu QR macierzy A .

3. Załóżmy, że pewien proces $f(x), x \in \mathbb{R}$ opisany jest w sposób liniowy, $f(x) = c_1x + c_2$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

dane	pomiar
x_1	y_1
\vdots	\vdots
x_k	y_k

Jak problem polegający na znalezieniu

$$\min_S \sum_{j=1}^k (f(x_j) - y_j)^2, \quad \text{gdzie } S := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ - liniowe}\} \quad (1)$$

zapisać w postaci macierzowej?

4. (Maple) Załóżmy, że pewien proces $f(x), x \in \mathbb{R}$ opisany jest w sposób liniowy, $f(x) = c_1x + c_2$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

dane	pomiar
1	11.0
2	12.5
3	14.5
4	16.0
5	18.0

Roziwaczać, za pomocą rozkładu QR problem (1). Na jednym wykresie umieścić wykres funkcji liniowej f będącej rozwiązaniem problemu (1) oraz krzywą łamaną łączącą punkty pomiarowe.

5. (Maple) Załóżmy, że pewien proces $f(t), t \in \mathbb{R}_+$ opisany jest za pomocą funkcji kwadratowej $f(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$:

czas	pomiar
1	1.0
2	1.5
3	3.0
4	6.0

Zauważyć, że problem

$$\min_{S_1} \sum_{j=1}^4 (f(t_j) - y_j)^2, \quad \text{gdzie } S_1 := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ - trójmian kwadratowy}\}$$

sprowadza się do rozwiązania problemu

$$\min_{c \in \mathbb{R}^3} \|Ac - y\| \tag{2}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Za pomocą odbić Hausholdera znaleźć rozkład QR macierzy A , a następnie rozwiązać problem (2). Na jednym wykresie umieścić wykres funkcji liniowej f będącej rozwiązaniem problemu (1) oraz krzywą łamaną łączącą punkty pomiarowe.