

1. Mamy następujący algorytm obliczania rozkładów  $LU$ . Dla danej macierzy kwadratowej  $A$  spełniającej założenia tw. o faktoryzacji  $LU$  postępujemy następująco

- stosujemy algorytm Gaussa; daje nam to macierz  $U$ ,
- w macierzy  $L = \{l_{ij}\}$  mamy  $l_{ij}$  = skalar przez który mnoży się  $j$ -ty wiersz w algorytmie Gaussa przed odjęciem go od  $i$ -ego wiersza.

Uzasadnić, że powyższa procedura jest poprawna.

2. Stosując powyższą metodę znaleźć faktoryzację  $LU$  macierzy:

$$(a) \begin{pmatrix} A = & 1 & 4 & 5 \\ & 4 & 18 & 26 \\ & 3 & 16 & 30 \end{pmatrix} \qquad (b) B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Używając rozkładów  $LU$  dla macierzy z poprzedniego zadania rozwiązać następujące układy równań:

- (a)  $Ax = a$ , gdzie  $a^T = (6, 6, 12)$ ,
- (b)  $Bx = b$ , gdzie  $b^T = (5, 11, 25, 21)$

4. W jaki sposób rozkład  $LU$  można wykorzystać do znajdowania macierzy odwrotnej do  $A \in GL_n(K)$  dopuszczającej rozkład  $LU$ ? (Wsk. rozważyć układy równań  $Ax = e_j, j = 1, \dots, n$ ). Zastosować tę metodę do macierzy z pkt a) w zad. 2.

5. Znaleźć taki przykład macierzy kwadratowej  $A$ , dla której rozkład  $LU$  istnieje i jest niejednoznaczny.

6. Pokazać, że jeżeli dla macierzy  $A$  rozkład  $LU$  istnieje i jest jednoznaczny, to dla macierzy  $A$  zachodzi  $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$ .

7. Wykazać, że jeżeli  $A \in M_{n \times n}(K)$  posiada jednoznaczny rozkład  $LU$  to:

- (a) istnieje rozkład macierzy  $A$  taki, że  $A = LDU$ , gdzie  $L$  oraz  $U$  są macierzami odpowiednią dolną i górną trójkątną o wyrazach równych 1 na przekątnych, a  $D$  jest macierzą diagonalną,

(b) powyższy rozkład  $LDU$  jest jedyny,

(c) podać rozkład  $LDU$  macierzy  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix}$ ,

- (d) jeżeli  $A$  jest symetryczna, to  $A = LDL^T$ , gdzie  $D$  jest macierzą diagonalną, a  $L$  macierzą dolną trójkątną o wyrazach równych 1 na przekątnej.

