1. Niech $\tau, \sigma \in S_n$. Wykazać, że $P_\tau P_\sigma = P_{\sigma\tau}$, gdzie $P_\tau, P_\sigma, P_{\sigma\tau}$ są odpowiednimi macierzami paermutacji.

2. Niech $A \in M_{q\times p}(K)$. Pokazać, że istnieją macierze:
   - permutacji $P \in M_{q\times q}(K)$,
   - dola trójkątna $L \in M_{q\times q}(K)$ o wyrazach równych jeden na przekątnej,
   - górna trójkątna $U \in M_{q\times p}(K)$

   takie, że $PA = LU$ (posłużyć się wskazówkami z wykładu).

3. Znaleźć rozkłady jak w zadaniu 2 nastepujących macierzy

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Korzystając z rozkładów z poprzedniego zadania rozwiązać układy:

   (a) $Ax = a$, gdzie A - macierz z zad.2.a, $a = [3, 60, 1, 5]^T$,

   (b) $Bx = b$, gdzie B - macierz z zad.2.b, $b = [1, 2, 3]^T$.

5. Znaleźć wszystkie możliwe wartości parametru $\xi \in \mathbb{R}$, dla którego macierz
$$\begin{bmatrix} \xi & 2 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix}$$
   posiada rozkład LU.

6. Znaleźć wszystkie mozliwe rozkłady LU macierzy
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 \\ 10 & 10 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
   Używając jednego z nich, rozwiązać układ $Ax = b$, gdzie $b = [-4, 0, 2, 1]^T$.

7. Niech $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Niech ponadto macierz U w rozkładzie “PLU“ ma same jedynki na przekątnych. Uzasadnić, że $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

8. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz niech $PA = LU$ będzie rozkładem macierzy A jak w zadaniu 2.Przypuśćmy, że $|l_{ij}| \leqslant 1, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz niech $\alpha = \max\{|a_{ij}|\}$.
   - Pokazać, że $|u_{ij}| \leqslant 2^{i-1}\alpha$.
   - Znaleźć przykłady macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ takich, że $u_{22} = 2\alpha$ oraz $u'_{33} = 4\alpha$, gdzie u_{22} oraz u'_{33} są odpowiednimi wyrazami macierzy U i U' w rozkładach $A = LU$ i $B = L'U'$.