1. Niech $x \in K^n$, $\|x\| = 1$. W jaki sposób, używając odbicia Hausholdera, znaleźć bazę ortonormalną zawierającą x? Używając tej metody, znaleźć bazę ortonormalną $\mathbb{R}^4$ zawierającą wektor $1/3[-1, 2, 0, 2]^T$.

2. Używając odbić Hausholdera, znaleźć bazę ortonormlaną $\mathrm{lin}\{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}^4$, gdzie a_1, a_2, a_3 są kolumnami macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{bmatrix}.$$

3. Wykazać, że jeżeli $(x, y) \in K^2 \backslash \{0\}$, to

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} \\ -y & x \end{bmatrix}$$

jest jedyną macierzą unitarną o wyznaczniku równym 1 taką, że automorfizm K^2, posiadający w bazie kanoniczną tę macierz, przeprowadza wektor (x, y) na wektor $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$. W przypadku, gdy $K = \mathbb{R}$ odworowanie to jest obrotem o kąt φ wyznaczonym przez

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{oraz} \quad \sin\varphi = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

4. Używając obrotów Givensa, znaleźć rozkład QR

   (a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

   (b) macierzy z zadania 9 z poprzedniego zestawu.

5. Niech $A \in GL_n(K)$. Wykazać, że macierz A można przedstawić w postaci $Q_1 L_1$, RQ_2, $L_2 Q_3$, gdzie Q_1, Q_2, Q_3 są macierzami unitarnymi, L_1 L_2 - macierzami solnymi trójkątnymi, a R - macierzą górną trójkątną.

6. Niech

$$F : \mathbb{C}^3 \ni (x, y, z) \longrightarrow \Big((2+5i)x+(1-i)y+(3+4i), (7-2i)x+(1+i)y+(2-3i)z\Big) \in \mathbb{R}^2.$$

Wyznaczyć $F^\star$.

7. Niech U, V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi, $g, f : U \longrightarrow V$ oraz $h : V \longrightarrow W$ - odwzorowaniami liniowymi. Wykazać, że
   (a) $(f+g)^\star = f^\star + g^\star$,
   (b) $(\lambda f)^\star = \overline{\lambda} f^\star$, dla $\lambda \in K$,
   (c) $(hf)^\star = f^\star h^\star$,
   (d) $f^{\star\star} = f$,
   (e) jeżeli f jest izomorfizmem, to $(f^\star)^{-1} = (f^{-1})^\star$.

8. Sprawdzić, czy macierz
$$C = \begin{bmatrix} 5+i & -2i \\ 2 & 4+2i \end{bmatrix}$$
jest normalna. Jeżeli tak, to znaleźć macierze A i B, będące odpowienio macierzą hermitowską i antyhermitowską, spełniające równanie $C = A + B$.

9. Znaleźć macierz unitarną P, która diagonlizuje macierz
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}.$$