1. Na przestrzeni $V = \mathcal{C}([0,1])$ zadajemy iloczyn skalarny

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in V.$$

Niech $S =$lin$\{p_0, p_1, p_2\}$, gdzie $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$. Znaleźć bazę ortonormalną S.

2. Niech $A \in GL_n(K)$ oraz $A = QR$ będzie jej rozkładem takim, że $Q \in O_n(K)$ oraz R jest macierzą górną trójkątną o dodatnich wyrazach na przekątnej. Wykazać jedyność takiego rozkładu (wykorzystać fakt, że jeżeli macierz jest jednocześnie ortonormalna i górna trójkątna o dodatnich wyrazach na diagonali, to jest jednostkowa.)

3. Wykazać, że każda macierz $A \in M_{m\times n}$ o niezależnych kolumnach posiada rozkład $A = QR$, gdzie $Q \in M_{m\times n}$ jest macierzą, której kolumny stanowią układ ortonormalny wektorów, a $R \in M_{n\times n}$ jest górna trójkątna, o dodatnich wyrazach na diagonali. Wykazać jedyność takiego rozkładu.

4. Wyznaczyć, używając ortonormalizacji Grama-Schmidta rozkłady QR macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$

5. Posługując się rozkładami z poprzedniego ćwiczenia, rozwiązać układy równań $Ax = b$, gdzie

(a) $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $b = \begin{pmatrix} -6 \\ 28 \\ 9 \end{pmatrix}$

a macierze A są odpowienimi macierzami z poprzedniego zadania.

6. Znaleźć rozkład QR macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

7. Niech U będzie przestrzenią unitarną skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $a, b \in U, a \neq b, \|a\| = \|b\|$. Wykazać, że istnieje dokładnie jedna symetria P_S względem pewnej hiperpłaszczyzny S taka, że $S(a) = b$.

8. Wykazać, że symetria przestrzeni unitarnej K^n względem hiperpłaszczyzny prostopadłej do lin$c$, gdzie $c \in K^n$ zadana jest przez macierz

$$I - \frac{2}{\|c\|^2}cc^*.$$

9. Używając odbić Hausholdera, znaleźć rozkład QR macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix}.$$

10. Niech U będzie przestrzenią unitarną skończonego wymiaru oraz niech $a, b \in U, \|a\| = \|b\|$ będą wektorami liniowo niezależnymi. Wykazać, że istnieją $\lambda \in K, |\lambda| = 1$ oraz symetria S względem pewnej hiperpłaszczyzny taka, że $S(a) = \lambda b$. Wykazać ponadto, że jeżeli $\langle a, b \rangle \neq 0$, to istnieją dokładnie dwie takie izometrie.