1. Czy wektor $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}$ jest kombinacją liniową wektorów $(1,2,4,3),(0,1,3,3),(1,2,1,5)$?

2. Cy istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^4$ będący kombinacją liniową wektorów $(1,2,1,1),(0,1,2,1)$ oraz jednocześnie kombinacją $(1,1,-1,-2)$ i $(1,0,-3,1)$? Jeżeli tak, to podać taki wektor.

3. Cy istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^4$ będący kombinacją liniową wektorów $(1,2,1,2),(0,1,0,1)$ oraz jednocześnie kombinacją $(1,2,-1,2)$ i $(0,1,-2,1)$? Jeżeli tak, to podać taki wektor.

4. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej $V \subset \mathbb{R}^4$ opisanej równaniami:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Opisać podprzestrzeń liniową $V = \text{lin}\{(1,2,1,3),(2,5,2,7),(1,3,1,4)\} \subset \mathbb{R}^4$ za pomocą układu równań liniowych.

6. Obliczyć wyznaczniki macierzy:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy skośnie symetryczną, jeżeli $a_{ij} = -a_{ji}$. wykazać, że wyznacznik maierzy skośnie symetrycznej nieparzystego stopnia jest równy 0.

8. Rozwiązać układy równań liniowych:

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

9. Dla jakich parametrów $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_3 + x_4 = b \\ x_1 + x_3 = c \\ x_2 + x_4 = d \end{cases}$$

jest niesprzeczny?

10. Znaleźć wielomian $P \in \mathbb{R}[X]$ trzeciego stopnia, dla którego $P(1) = -2, P(2) = -4, P(3) = -2, P(4) = 10$.

11. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\text{(a)} \begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 2x + 3 - az = 2 \\ 3x + y + 2z = a \\ ax + 5y - 4z = 3 \end{cases}$$

12. Niech

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow (2x + y, x + y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wyznaczyć macierz f^* w bazie złożonej z form

$$\begin{array}{l} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow x + 2y \in \mathbb{R} \\ \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow x + 3y \in \mathbb{R} \end{array}.$$

oraz bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$ taką, że baza złożona z form φ_1, φ_2 jest do niej dulna.