1. Niech X będzie przestrzenią wektorową oraz $\dim X = n < \infty$. Niech $\alpha_1, \dots \alpha_k \in X^*$. Wykazać, że następujące liczby są równe:
   - rząd odwzorowania $(\alpha_1, \dots \alpha_k)$,
   - wymiar podprzestrzeni w X^* generowanej przez $\alpha_1, \dots \alpha_k$.

2. Czy poniższe funkcjonały są liniowo niezależne i generują przestrzeń dualną?
   (a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$,
   (b) $x_1+x_2+3x_3-x_4, 2x_2+2x_3-2x_4, x_1+3x_2+4x_3-4x_4, -x_1+2x_3-2x_4 \in (\mathbb{R}^4)^*$,
   (c) w $\mathbb{R}_2[X]$ (przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej 2): ewaluacje p_1, p_2, p_3, p_4 odpowiednio w punktach $0, 1, -1, 2$.

3. Niech X będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Niech $x \in X$. Wykazać, że
$$x = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall_{f \in X^*} \ f(x) = 0.$$

4. Niech $f_1, f_2, f_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$:
$$f_1(x, y, z) = x - 2y, \quad f_2(x, y, z) = x + y + z, \quad f_3(x, y, z) = y - 3z.$$
Pokazać, że f_1, f_2, f_3 są liniowo niezależne oraz znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$ do niej dualną.

5. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru, $f : V \longrightarrow V$ będzie liniowym endomorfizmem. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
   - $V = imf \oplus kerf$,
   - $kerf = kerf^2$.

6. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru, $f : V \longrightarrow V$ będzie liniowym endomorfizmem. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
   - f jest monomorfizmem,
   - f jest epimorfizmem.

7. Niech $E_{ij}, i, j = 1, 2$ będzie bazą kanoniczną przestrzeni $M_2(K)$ macierzy kwadratowych stopnia 2. Wyznaczyć w tej bazie
   - macierz endomorfizmu
$$M_2(K) \ni X \longrightarrow X^* \in M_2(K),$$
   - dla danych macierzy $A, B \in M_2(K)$, macierz endomorfizmu
$$M_2(K) \ni X \longrightarrow AXB \in M_2(K),$$
   - dla danych macierzy $A, B \in M_2(K)$, macierz endomorfizmu
$$M_2(K) \ni X \longrightarrow AX + XB \in M_2(K).$$

8. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Wykazać, albo podać kontrprzykład:
   - $\mathrm{tr}(AB)$=$\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$,
   - $\mathrm{tr}(A+B)$=$\mathrm{tr}(A)$+$\mathrm{tr}(B)$,
   - $\mathrm{tr}(A^{-1})$=$\frac{1}{\mathrm{tr}(A)}$,
   - $\mathrm{tr}(xA)$=$x\mathrm{tr}(A)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$,
   - $\det(xA)$=$x\det(A)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$,
   - $\det(A+B)$=$\det(A)$+$\det(B)$.
9. Wykazać, że jeżeli $A \in M_n(K)$ jest taką macierzą kwadratową, że dla dowolnej macierzy $B \in M_n(K)$ zachodzi równośc $\mathrm{tr}(AB) = 0$, to $A = 0$.
10. Wykazać, że jeżeli $A \in M_n(K)$ jest taką macierzą kwadratową, że dla dowolnej nieosobliwej macierzy $B \in M_n(K)$ zachodzi równośc $\mathrm{tr}(AB) = 0$, to $A = 0$.