1. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy z $M_n(\mathbb{R})$:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. Znaleźć wektory własne i wartości własne następujących przekształaceń liniowych:

   (a) $T : \mathbb{C}^2 \ni (x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \in \mathbb{C}^2$,

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3$.

3. Niech $1 \leqslant k \leqslant n, k, n \in \mathbb{N}$ oraz niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Niech f będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie wartością własną macierzy A. **Krotnością algebraiczną wartości własnej** λ nazywamy krotność pierwiastka λ wielomianu f i oznaczamy przez $k_a(\lambda)$. **Krotnością geometryczną wartości własnej** λ nazywamy wymiar przestrzeni własnej wartości własnej λ, która odpowiada odwzorowaniu liniowemu zadanemu przez A i oznaczamy ją przez $k_g(\lambda)$. Podać przykład takiej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, dla której $k = k_g(\lambda)$ oraz $n = k_a(\lambda)$.

4. Niech X będzie sumą prostą podprzestrzeni U i V. Niech $x \in X$ oraz niech $x = u + v$, gdzie $u \in U$ oraz $v \in V$, będzie rozkładem w sumie prostej. Wyznaczyć wartości własne endomorfizmu $F : X \longrightarrow X$ zadanego równaniem:

   (a) $F(x) = u$,

   (b) $F(x) = -u + v$.

5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą kwadratową, a

$$f_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$$

będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A. Wykazać, że $a_{n-1} =$tr$A$ oraz że $A_0 =$det$A$.

6. Wykazać następujące związki między wielomianami charakterystycznymi:

   (a) $W_{AB}(t) = W_{BA}(t)$, gdzie $A, B \in M_n(K)$,

   (b) $W_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{\det A}(-t)^n W_A(\frac{1}{t})$, gdzie $A \in GL_n(K)$,

   (c) $W_M(t) = W_{A+B}(t) W_{A-B}(t)$, gdzie $A, B \in M_n(K)$ oraz

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

7. Znaleźć wielomian charakterystyczny macierzy

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

8. Niech λ będzie wartością własną macierzy $A \in M_n(K)$. Niech $W \in K[X]$. Wykazać, że $W(\lambda)$ jest wartością własną macierzy $W(A) \in M_n(K)$ (jeżeli $W(x) = a_k x^k + \ldots + a_0$, to $W(A) = a_k A^k + \ldots + a_0 I_n$).

9. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
Wykazać, że nie istnieje taka macierz $B \in GL_2(\mathbb{R})$, że macierz $B^{-1}AB$ jest diagonalna.